

**Р. В. Шамин**

**Об одном численном методе  
в задаче о движении идеальной жидкости  
со свободной поверхностью**

## **1 Введение**

В работе предлагается численный метод решения задачи о нестационарном потенциальном течении идеальной жидкости со свободной поверхностью в гравитационном поле. Доказывается сходимость этого метода в предположении существования гладкого решения. Приведена схема для эффективных расчетов.

Аналогичные задачи изучались в работах [1]–[2]. Были получены условия существования решений на достаточно малом временном интервале. В случае вязкой жидкости результаты о локальной разрешимости аналогичной задачи получены в [3].

Ряд авторов изучали численные методы для моделирования задач, описывающих нестационарное течение идеальной жидкости со свободной поверхностью, см., например, [4]–[9].

В настоящей работе рассматриваются уравнения Дьяченко, эквивалентные точным уравнениям, описывающим нестационарное потенциальное течение идеальной жидкости со свободной поверхностью. Эти уравнения были предложены в работе [10]. Для уравнений Дьяченко построен численный метод и доказана его сходимость в пространствах Соболева. Дано обоснование известных методов, применявшихся в [10] для численного решения уравнений Дьяченко. Предложенный в работе метод позволяет строить различные схемы для численного решения уравнений Дьяченко.

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 04-05-64784, № 04-01-00256 и Программой фундаментальных исследований Президиума РАН «Математические методы в нелинейной динамике».

## 2 Постановка задачи

Пусть идеальная несжимаемая жидкость занимает область в плоскости  $(x, y)$ , ограниченную свободной поверхностью

$$\begin{aligned} -\infty < y \leq \eta(x, t), \\ -\infty < x < \infty, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Считая движение жидкости потенциальным, мы имеем

$$v(x, y, t) = \nabla\Phi(x, y, t),$$

где  $v(x, y, t)$  — двумерное поле скоростей,  $\Phi(x, y, t)$  — потенциал. Всюду в данной работе мы считаем, что операторы градиента и Лапласа применяются лишь по пространственным переменным  $x$  и  $y$ . Из условия несжимаемости жидкости  $\operatorname{div} v = 0$  следует, что потенциал скоростей удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\Phi(x, y, t) = 0. \quad (2.1)$$

С уравнением (2.1) связываются следующие граничные и начальные условия:

$$(\eta_t + \Phi_x \eta_x - \Phi_y)|_{y=\eta(x,t)} = 0, \quad (2.2)$$

$$(\Phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + gy)|_{y=\eta(x,t)} = 0, \quad (2.3)$$

$$\Phi_y|_{y=-\infty} = 0, \quad (2.4)$$

$$\eta|_{t=0} = \eta_0(x), \quad (2.5)$$

$$\Phi|_{t=0} = \Phi_0(x, y). \quad (2.6)$$

Здесь  $g$  — ускорение поля тяжести.

Удобно ввести величину  $\Psi(x, t) = \Phi(x, \eta(x, t), t)$ , которая является значением потенциала на свободной поверхности (см. [11]). В работе [12] было установлено, что переменные  $\eta$  и  $\Psi$  являются канонически сопряженными величинами, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial\eta}{\partial t} &= \frac{\delta H}{\delta\Psi}, \\ \frac{\partial\Psi}{\partial t} &= \frac{\delta H}{\delta\eta}, \end{aligned}$$

где гамильтониан  $H$  совпадает с полной энергией жидкости  $H = T + U$ ,

$$T = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\eta(x,t)} |\nabla\Phi|^2 dy,$$

$$U = \frac{g}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2(x,t) dx.$$

Задача (2.1)–(2.6) является достаточно сложной для непосредственного изучения. Следуя работе [11], перепишем задачу (2.1)–(2.6) в других обозначениях. Совершим конформное отображение области, занимаемой жидкостью в плоскости  $(x, y)$  в полупространство в переменных  $(u, v)$ .

$$-\infty < u < \infty, \quad -\infty < v < 0$$

После преобразования поверхность  $\eta(x, t)$  может быть представлена в параметрическом виде

$$y = y(u, t), \quad x = u + \tilde{x}(u, t),$$

где  $\tilde{x}(u, t)$  и  $y(u, t)$  связаны оператором Гильберта

$$y = \mathbf{H}[\tilde{x}], \quad \tilde{x} = -\mathbf{H}[y],$$

$$\mathbf{H}[f](u) = \frac{1}{\pi} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u') du'}{u' - u}.$$

Как показано в работах, цитированных выше, переменные  $y(u, t)$  и  $\Psi(u, t)$  полностью описывают движение жидкости и подчиняются следующей системе интегро-дифференциальных уравнений:

$$y_t = y_u \mathbf{H} \left[ \frac{\mathbf{H}[\Psi_u]}{J} \right] - x_u \frac{\mathbf{H}[\Psi_u]}{J}, \quad (2.7)$$

$$\Psi_t = -\frac{\Psi_u^2 + (\mathbf{H}[\Psi_u])^2}{2J} + \mathbf{H} \left[ \frac{\mathbf{H}[\Psi_u]}{J} \right] \Psi_u + \frac{\mathbf{H}[\Psi_u]}{J} \mathbf{H}[\Psi_u] - gy, \quad (2.8)$$

где  $J = x_u^2 + y_u^2$  — якобиан отображения.

Как оказалось (см. [10]), уравнения (2.7)–(2.8) можно переписать в более удобной форме.

Образует пару комплексных функций  $z(w, t) = x(w, t) + iy(w, t)$  и на действительной оси  $\Phi(u, t) = \Psi(u, t) + i\mathbf{H}[\Psi(u, t)]$ , где  $w = u + iv$ . Введем новые переменные  $R(w, t)$  и  $V(w, t)$  по следующим формулам:

$$R(w, t) = \frac{1}{z_w}, \quad V(w, t) = i \frac{\Phi_w}{z_w}.$$

Функции  $R$  и  $V$  аналитичны в нижней полуплоскости и удовлетворяют следующим условиям:

$$R(w, t) \rightarrow 1, \quad |w| \rightarrow \infty, \quad \text{Im } w \leq 0,$$

$$V(w, t) \rightarrow 0, \quad |w| \rightarrow \infty, \quad \text{Im } w \leq 0.$$

Как показано в работе [10], функции  $R$  и  $V$  удовлетворяют следующей системе интегро-дифференциальных уравнений:

$$R_t = i(UR_w - U_w R),$$

$$V_t = i(UV_w - B_w R) + g(R - 1),$$

где  $U = P(V\bar{R} + \bar{V}R)$ ,  $B = P(V\bar{V})$ ,  $P = \frac{1}{2}(I + i\mathbf{H})$  — интегральный оператор. Эти уравнения называются уравнениями Дьяченко.

**Замечание 2.1.** Мы будем рассматривать периодическую по переменной  $u$  задачу, т. е. на искомые функции  $R$  и  $V$  будем накладывать условия  $2\pi$ -периодичности по переменной  $u$ .

**Замечание 2.2.** Уравнения справедливы в нижней полуплоскости комплексной области, однако нас будут интересовать решения лишь на вещественной оси  $v = 0$ .

Приведем окончательную постановку задачи, для которой будем исследовать численную схему:

$$\begin{aligned} R_t(u, t) &= i(U(u, t)R_u(u, t) - U_u(u, t)R(u, t)), \\ V_t(u, t) &= i(U(u, t)V_u(u, t) - B_u(u, t)R(u, t)) + g(R(u, t) - 1), \\ 0 < u < 2\pi, \quad 0 < t < T, \\ R(0, t) &= R(2\pi, t), \quad V(0, t) = V(2\pi, t), \quad 0 < t < T, \\ R(u, 0) &= R_0(u), \quad V(u, 0) = V_0(u), \quad 0 < u < 2\pi, \end{aligned} \tag{2.9}$$

где  $U = P(V\bar{R} + \bar{V}R)$ ,  $B = P(V\bar{V})$ ,  $P = \frac{1}{2}(I + i\mathbf{H})$ .

Чтобы сформулировать определение решения задачи (2.9), мы введем функциональные пространства. Пусть  $Q = (0, 2\pi) \times (0, T)$ ,  $0 < T < \infty$ , — прямоугольник на плоскости  $(u, t)$ . Через  $L_p(Q)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , будем обозначать лебегово пространство измеримых функций, суммируемых в степени  $p$ , со следующей нормой:

$$\|f\|_{L_p(Q)} = \left( \int_Q |f(u, t)|^p du dt \right)^{1/p}.$$

Через  $\widetilde{W}_p^k(Q)$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , обозначим пополнение по норме

$$\|f\|_{\widetilde{W}_p^k(Q)} = \left( \sum_{|s_1+s_2|\leq k} \|D_u^{s_1} D_t^{s_2} f\|_{L_p(Q)}^p \right)^{1/p}$$

всех функций вида  $f(u, t) = \sum_{m=-N}^N c_m(t) e^{imu}$ , где функции  $c_m(t)$  имеют непрерывные производные вплоть до  $k$ -го порядка на отрезке  $[0, T]$ . Пространства  $\widetilde{W}_p^k(Q)$  — подпространства пространств Соболева, удовлетворяющее условиям периодичности по переменной  $u$ . Пространства Соболева были введены в [13], пространства Соболева с периодическими условиями рассматривались, например, в [15].

В дальнейшем будем предполагать, что  $R_0, V_0 \in L_1(0, 2\pi)$ .

Введем функционал невязки для задачи (2.9)

$$J(R, V) = \|R_t - i(UR_u - U_u R)\|_{L_1(Q)} + \|V_t - i(UV_u - B_u R) - g(R-1)\|_{L_1(Q)} + \|R|_{t=0} - R_0\|_{L_1(0, 2\pi)} + \|V|_{t=0} - V_0\|_{L_1(0, 2\pi)},$$

где функции  $U$  и  $B$  определены выше.

**Лемма 2.1.** *Функционал  $J$  непрерывен на  $\widetilde{W}_4^1(Q) \times \widetilde{W}_4^1(Q)$ .*

*Доказательство.* Пусть  $R^k, V^k \in \widetilde{W}_4^1(Q)$ ,  $R^k \rightarrow R$ ,  $V^k \rightarrow V$  в  $\widetilde{W}_4^1(Q)$  при  $k \rightarrow \infty$ . В силу непрерывности оператора дифференцирования  $D_t : \widetilde{W}_4^1(Q) \rightarrow L_1(Q)$  имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|R_t^k - R_t\|_{L_1(Q)} = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|V_t^k - V_t\|_{L_1(Q)} = 0.$$

Пусть  $W^k = \overline{R}^k V^k + \overline{V}^k R^k$  и  $W = \overline{R}V + \overline{V}R$ . Эти функции принадлежат гильбертову пространству  $\widetilde{W}_2^1(Q)$ . В силу непрерывности операторов дифференцирования  $D_t : \widetilde{W}_2^1(Q) \rightarrow L_2(Q)$  и  $D_u : \widetilde{W}_2^1(Q) \rightarrow L_2(Q)$ ,

теоремы Лебега о предельном переходе и неравенства Гельдера имеем

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \|W^k - W\|_{\widetilde{W}_2^1(Q)}^2 = \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_Q (|W^k - W|^2 + |D_t W^k - D_t W|^2 + |D_u W^k - D_u W|^2) du dt = 0. \end{aligned}$$

Представим функцию  $W^k$  в виде  $W^k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m^k(t) e^{imu}$ , где ряд сходится в пространстве  $\widetilde{W}_2^1(Q)$ . Применяя к  $W^k$  оператор  $P$ , мы видим, что

$$U^k = \frac{1}{2} c_0^k(t) + \sum_{m=-\infty}^{-1} c_m^k(t) e^{imu}.$$

Линейный оператор  $P$  непрерывен в пространстве  $\widetilde{W}_2^1(Q)$ , поэтому  $U^k \rightarrow U$  в  $\widetilde{W}_2^1(Q)$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Поскольку

$$\|U^k R_u^k\|_{L_1(Q)} \leq \|U^k\|_{L_2(Q)} \|R_u^k\|_{L_2(Q)},$$

$$\|U_u^k R^k\|_{L_1(Q)} \leq \|U_u^k\|_{L_2(Q)} \|R^k\|_{L_2(Q)},$$

то  $U^k R_u^k \rightarrow U R_u$ ,  $U_u^k R^k \rightarrow U_u R$  в  $L_1(Q)$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Аналогично доказывается, что  $U^k V_u^k \rightarrow U V_u$ ,  $B_u^k R^k \rightarrow B_u R$  в  $L_1(Q)$  при  $k \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Определение 2.1.** Пару функций  $R^*, V^* \in \widetilde{W}_4^1(Q)$  назовем решением задачи (2.9), если  $J(R^*, V^*) = 0$ .

### 3 Доказательство сходимости приближенной схемы

Доказательство сходимости приближенной схемы будем проводить методом минимизации невязки. При этом будут использоваться результаты теории регуляризации Тихонова некорректных задач. В дальнейшем будем предполагать существование и единственность гладкого решения задачи (2.9).

**Предположение 3.1.** Пусть  $R_0, V_0$  таковы, что существует единственное решение задачи (2.9), обозначаемое  $R^*, V^*$ , где  $R^*$  и  $V^*$  принадлежат  $\widetilde{W}_2^2(Q)$ .

Введем функционал  $\Omega(R, V) = \|R\|_{\widetilde{W}_2^2(Q)}^2 + \|V\|_{\widetilde{W}_2^2(Q)}^2$ , определенный на всем  $\widetilde{W}_2^2(Q)$ .

**Лемма 3.1.** *Функционал  $\Omega$  является стабилизатором для задачи (2.9), т. е. выполнены следующие условия:*

- 1)  $\Omega(R, V) \geq 0$ ;
- 2) множество  $\Omega_M = \{(R, V) : R, V \in \widetilde{W}_2^2(Q), \Omega(R, V) \leq M\}$  является предкомпактным в  $\widetilde{W}_4^1(Q) \times \widetilde{W}_4^1(Q)$ , т. е. из любой последовательности из  $\Omega_M$  можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся в  $\widetilde{W}_4^1(Q) \times \widetilde{W}_4^1(Q)$ ;
- 3)  $R^*, V^*$  принадлежат области определения  $\Omega$ .

*Доказательство.* Пункт 1) следует из определения  $\Omega$ , пункт 2) следует из теоремы Реллиха—Кондрашова о компактности вложения пространств Соболева [13], пункт 3) следует из предположения 3.1.  $\square$

Приведем абстрактную приближенную схему, а потом рассмотрим способы ее конструктивной реализации.

Обозначим  $\Omega^* = \Omega(R^*, V^*)$ . Введем две числовые последовательности  $\alpha_k > 0$ ,  $\beta_k > 0$ ,  $\alpha_k \rightarrow 0$ ,  $\beta_k \rightarrow 0$ . Введем множество

$$\Omega_k = \{(R, V) : R, V \in \widetilde{W}_2^2(Q), \Omega(R, V) \leq \Omega^* + \beta_k\}.$$

Последовательность  $\{R_k, V_k\}$  будем определять из условий

$$J(R_k, V_k) \leq J_k^* + \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.1)$$

где  $J_k^* = \inf_{\Omega_k} J(R, V)$ .

**Теорема 3.1.** *Пусть выполнено предположение 3.1, тогда*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(R_k, V_k) = 0$$

*и*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|R_k - R^*\|_{\widetilde{W}_4^1(Q)} = 0,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|V_k - V^*\|_{\widetilde{W}_4^1(Q)} = 0.$$

*Доказательство.* Утверждение теоремы следует из теоремы 1, § 7, гл. 2 [14].  $\square$

Схема (3.1) является не вполне конструктивной, поскольку неизвестно значение  $\Omega^*$ . Тем не менее существуют конструктивные методы реализации этой схемы (см. п. 3, § 7, гл. 2 [14]). Для удобства читателя приведем такую схему, следуя изложению [14], для задачи (3.1).

Будем предполагать, что известно такое число  $M$ , что  $\Omega(R^*, V^*) \leq M$ . В качестве начального приближения произвольно зададим число  $\gamma_0 > 0$  и функции  $R_0, V_0 \in \widetilde{W}_2^2(Q)$ . Пусть уже сделано  $n - 1$  шагов и найдены  $\gamma_{n-1}$  и  $R_{n-1}, V_{n-1} \in \widetilde{W}_2^2(Q)$ . Положим  $\gamma_n = 2^{-1}\gamma_{n-1}$ , а  $R_n, V_n$  найдем как решение следующей экстремальной задачи

$$J^* = \inf_{\Omega_M} J(R, V) \leq J(R_n, V_n) \leq J^* + \gamma_n,$$

где  $(R_n, V_n) \in \Omega_M$ ,  $\Omega_M = \{(R, V) : R, V \in \widetilde{W}_2^2(Q), \Omega(R, V) \leq M\}$ .

Далее проверяем неравенство

$$J(R_n, V_n) > \gamma_n. \quad (3.2)$$

Если неравенство (3.2) не выполнено, то повторяем процесс. Как показано в [14], неравенство (3.2) выполнится обязательно, если только  $\Omega^* \neq 0$ . Случай  $\Omega^* = 0$  соответствует тривиальному решению, которое невозможно в задаче (2.9).

Итак, пусть при  $n = N_0$  выполнено неравенство (3.2). Дальнейшие приближения будем искать с помощью другого итерационного процесса. Положим  $\omega_{0,n} = 2^{-n}M$ ,  $\gamma_{0,n} = 2^{-(n+1)}\gamma_{N_0}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ,

$$\Omega_{0,n} = \{(R, V) : R, V \in \widetilde{W}_2^2(Q), \Omega(R, V) < \omega_{0,n}\}.$$

Найдем  $R_{0,n}, V_{0,n}$  и  $\tilde{R}_{0,n}, \tilde{V}_{0,n}$  как решения задач:

$$J_{0,n}^* = \inf_{\Omega_{0,n}} J(R, V) \leq J(R_{0,n}, V_{0,n}) \leq J_{0,n}^* + \gamma_{0,n},$$

$$J_M^* = \inf_{\Omega_M} J(R, V) \leq J(\tilde{R}_{0,n}, \tilde{V}_{0,n}) \leq J_M^* + \gamma_{0,n},$$

и при каждом  $n = 0, 1, \dots$  будем проверять неравенство

$$J(R_{0,n}, V_{0,n}) - J(\tilde{R}_{0,n}, \tilde{V}_{0,n}) > \gamma_{0,n}.$$

Известно (см. [14]), что найдется такой номер  $n_k$  ( $k = 0$ ), что это неравенство выполнится.

Положим  $\omega_k = \omega_{k,n_k}$ ,  $\gamma_k = \gamma_{k,n_k}$ ,  $R_k = R_{k,n_k}$ ,  $V_k = V_{k,n_k}$ . Следующие шаги повторяются со значениями  $\omega_{k+1}$  и  $\gamma_{k+1,n}$ :

$$\begin{cases} \omega_{k+1,n} = \omega_k + (M - \omega_k)2^{-n}, \\ \gamma_{k+1,n} = \gamma_k 2^{-(n+1)}, \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.3)$$

Положим  $\Omega_{k,n} = \{(R, V) : R, V \in \widetilde{W}_2^2(Q), \Omega(R, V) \leq \omega_{k,n}\}$ ; при фиксированном  $k$  найдем  $R_{k,n}$ ,  $V_{k,n}$ ,  $\tilde{R}_{k,n}$ ,  $\tilde{V}_{k,n}$ , такие, что

$$\begin{aligned} J_{k,n}^* &= \inf_{\Omega_{k,n}} J(R, V) \leq J(R_{k,n}, V_{k,n}) \leq J_{k,n}^* + \gamma_{k,n}, \\ J_M^* &= \inf_{\Omega_M} J(R, V) \leq J(\tilde{R}_{k,n}, \tilde{V}_{k,n}) \leq J_M^* + \gamma_{k,n}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

и при каждом  $n = 0, 1, \dots$  будем проверять неравенство

$$J(R_{k,n}, V_{k,n}) - J(\tilde{R}_{k,n}, \tilde{V}_{k,n}) > \gamma_{k,n}.$$

После того как будет найден  $n_k$ , пересчитываем по схеме (3.3)–(3.4). Последовательность  $R_k, V_k$  сходится к решению в смысле теоремы 3.1.

## 4 Эффективная реализация приближенной схемы

Нами была описана схема для вычисления приближенного решения. Однако эта схема требует находить условный экстремум функционала, что является технически сложной задачей. Сейчас мы опишем эффективную реализацию решения задачи (3.4). Для этого будем использовать аппроксимацию решения гладкими сплайнами.

Пусть в области  $Q$  задан конечный набор несовпадающих точек  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , и в каждой точке  $x_i$  задано число  $y_i$ . Поставим задачу отыскания интерполяционных сплайн-функций  $\sigma \in \widetilde{W}_2^2(Q)$  из условия

$$\min_{\sigma(x_i)=y_i} \left\{ \int_Q (|\sigma_{uu}|^2 + 2|\sigma_{ut}|^2 + |\sigma_{tt}|^2) du dt \right\}. \quad (4.1)$$

Задача (4.1) имеет единственное решение, более того, существует очень эффективные методы построения сплайна  $\sigma$  по набору точек  $\{(x_i, y_i)\}$  (см. [15]–[17]).

Для каждого  $N > 0$  зафиксируем определенную систему точек  $S_N = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \overline{Q}$  таким образом, чтобы  $S_N$  образовывала  $\varepsilon_N$ -сеть,  $\varepsilon_N \rightarrow 0$

при  $N \rightarrow \infty$ . Через  $\Theta_N$  обозначим множество всех сплайн-функций, построенных на сетке  $S_N$ . По определению  $\Theta_N \subset \widetilde{W}_2^2(Q)$ . Введем отображение  $Q_N : \widetilde{W}_2^2(Q) \rightarrow \Theta_N$  по следующему правилу: функция из  $\widetilde{W}_2^2(Q)$  сужается на сетку  $S_N$ , что возможно в силу теоремы вложения Соболева, а затем строится сплайн по правилу (4.1). Для любой функции  $f \in \widetilde{W}_2^2(Q)$  имеет место (см. § 4.3 [15])

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - Q_N f\|_{\widetilde{W}_2^2(Q)} = 0. \quad (4.2)$$

Функциональное пространство  $\Theta_N$  является конечномерным, а следовательно, пригодным для проведения вычислений. Покажем, что с помощью аппарата сплайнов можно осуществить аппроксимацию экстремальных задач из раздела 3.

Рассмотрим задачу поиска минимизирующей последовательности для задачи

$$\inf_{\widetilde{W}_2^2(Q)} J(R, V) = 0. \quad (4.3)$$

Введем последовательность конечномерных задач

$$I_N^* = \inf_{\Theta_N} J(R, V), \quad N = 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

**Теорема 4.1.** *Последовательность задач (4.4) аппроксимирует задачу (4.3) по функции, т. е.  $\lim_{N \rightarrow \infty} I_N^* = 0$ .*

*Доказательство.* Пусть  $R, V \in \widetilde{W}_2^2(Q)$ , тогда в силу леммы 2.1 и (4.2) имеет место  $\lim_{N \rightarrow \infty} (J(Q_N(R), Q_N(V)) - J(R, V)) = 0$ . Из этого равенства по теореме 1.1, гл. 3 [14] следует, что  $\lim_{N \rightarrow \infty} I_N^* = 0$ .  $\square$

Решение задачи (4.4) при фиксированном  $N$  может быть эффективно найдено следующим образом. Сначала находим с помощью разностных методов решение задачи (2.9) (см. [11]), а затем по значениям в узлах сетки строим сплайн. Нужной точности решения задачи (4.4) всегда можно добиться выбором соответствующей сетки.

Итак, пусть найдено приближенное решение  $R_N, V_N$  задачи (4.3). Представим это приближенное решение в виде рядов

$$R_N = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^k(t) e^{iuk},$$

$$V_N = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v^k(t) e^{iuk}.$$

В схеме, описанной в разделе 3, нам нужно решать задачи типа (4.3) с ограничениями

$$\Omega(R_N, V_N) \leq M. \quad (4.5)$$

Если неравенство (4.5) не выполнено для решения задачи (4.3), тогда получим решение задачи (4.3), (4.5) с помощью операторов  $T_M : \widetilde{W}_2^2(Q) \rightarrow \widetilde{W}_2^2(Q)$  по формуле

$$T_M \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{-iku} \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k f_k e^{-iku},$$

где коэффициенты  $\lambda_k$  равны единице при малых  $|k|$  и быстро убывают при больших  $|k|$ . В силу гладкости решений коэффициенты  $r^k, v^k$  убывают по соответствующим нормам достаточно быстро с ростом  $|k|$ . Следовательно, оператор  $T_M$  можно выбрать таким образом, чтобы удовлетворить условию (4.5).

## 5 Пример расчета

Приведем пример расчета по описанной схеме. В качестве начального условия возьмем гладкую стационарную волну движущуюся со скоростью  $v_c = 1.1$ . Методы расчета стационарных волн для уравнений Дьяченко можно найти в [11]. На рисунках 1 и 2 приведены профиль и спектр в логарифмическом масштабе начальной волны. Горизонтальная часть спектра при  $k > 160$  есть следствие ограниченной точности вычислений.

Расчет проводился на 1024 точках на периоде  $2\pi$  по переменной  $u$ , с шагом по времени 0.002. Интегрирование системы (2.9) производилось при  $0 \leq t \leq 7000$ , что соответствует примерно 1000 периодов движения стационарной волны. На рисунках 3 и 4 приведены профиль волны и спектр решения при  $t = 7000$ . Рост гармоник при  $k > 230$  обусловлен погрешностями вычислений.

Дополнительным контролем вычислений может служить проверка сохранения полной энергии жидкости. В таблице 1 приведены данные об изменении полной энергии жидкости в процессе счета. Общее время счета на стандартном офисном компьютере составило порядка 17 часов.

Описания других численных экспериментов с использованием уравнений Дьяченко приведены в [10]. В частности, в этой работе описаны решения отвечающие образованию интересного океанологического явления «волна-убийца». О «волнах-убийцах» см. обзор [18].

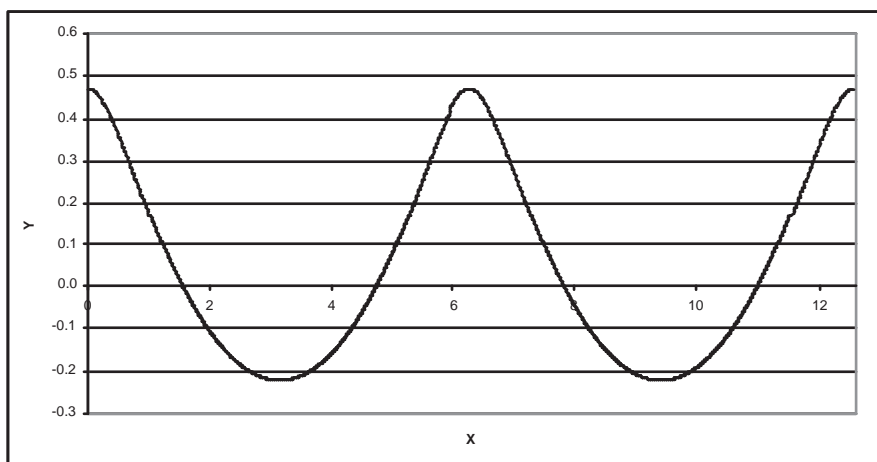


Рис. 1: Профиль начальной волны

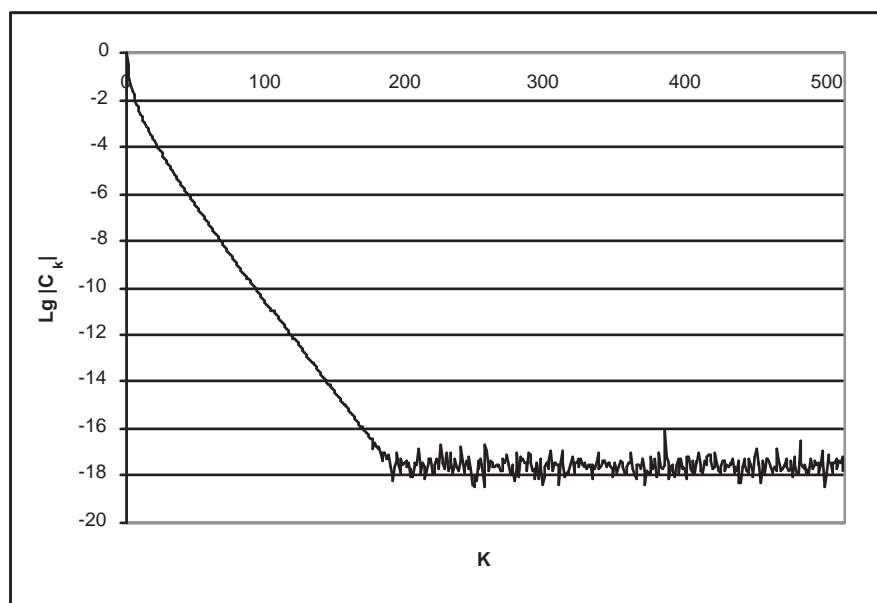


Рис. 2: Логарифмический спектр начальной волны

## 6 Заключение

Опыт численного решения задачи (2.9) показывает, что применение оператора  $T_M$  излишне в ряде случаев. Даже без применения стабили-

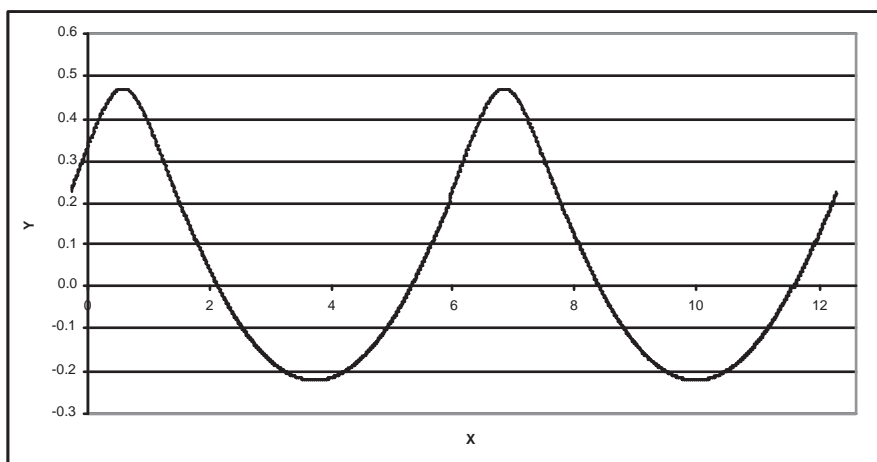


Рис. 3: Профиль решения при  $t = 7000$

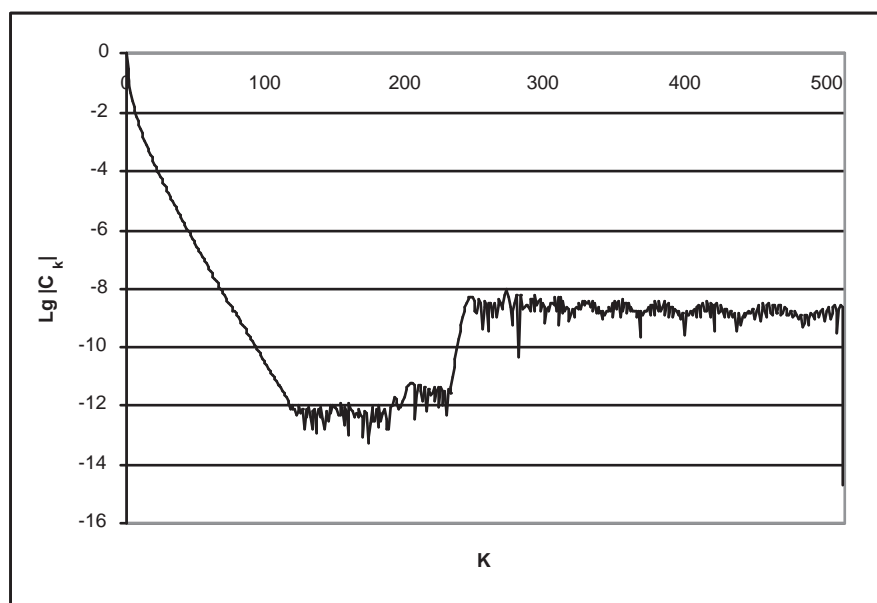


Рис. 4: Логарифмический спектр решения при  $t = 7000$

затора, устойчивость численной схемы для уравнений Дьяченко оказывается очень хорошей (см. [10]). В работах Захарова и Дьяченко количество точек по пространственной переменной достигало более  $2 \times 10^6$ ,

Таблица 1

Время, $t$	Полная энергия, $E_t$	Погрешность энергии, $ E_t - E_0 $
0	0.0284744258836689	$0.000000 \times 10^{-10}$
1000	0.0284744258786083	$0.050606 \times 10^{-10}$
2000	0.0284744258551782	$0.284907 \times 10^{-10}$
5000	0.0284744257823800	$1.012889 \times 10^{-10}$
7000	0.0284744257346554	$1.490135 \times 10^{-10}$

что говорит о чрезвычайно удачной форме этих уравнений. Важной отличительной чертой предлагаемых методов от других известных методов решения задач описания течения идеальной жидкости со свободной поверхностью является возможность проведение численных расчетов с большой точностью на больших временных интервалах. Однако вопрос об обосновании численных методов для уравнений Дьяченко оставался открытым.

В настоящей работе предложенная идея доказательства сходимости численных методов не только дает возможность обосновать известные схемы, но и позволяет строить новые схемы, в частности, на неравномерных сетках.

Автор выражает искреннюю благодарность академику РАН В. Е. Захарову и доктору А. И. Дьяченко за постановку задачи и внимание к работе.

## Список литературы

- [1] Налимов В. И. Нестационарные вихревые волны // Сибирский математический журнал, 1996, т. 37, N 6, с. 1356–1366.
- [2] Налимов В. И. Задача Коши-Пуассона // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1974, вып. 18, с. 104–210.
- [3] Солонников В. А. Разрешимость задачи об эволюции вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью, на конечном интервале времени. // Алгебра и анализ, 1991, N 1, с. 222–257.
- [4] Протопопов Б. Е. Численное моделирование поверхностных волн в канале переменной глубины // Вычислительные методы прикладной гидродинамики, 1988, вып. 84, с. 91–105.

- [5] Гарипов Р. М. Неустановившиеся волны над подводным хребтом // Докл. АН СССР, 1965, т. 161, N 3, с. 547-550.
- [6] Воинов В. В., Воинов О. В. Численный метод расчета нестационарных движений идеальной несжимаемой жидкости со свободными поверхностями // Доклады АН СССР, 1975, т. 221, N 3, с. 559-562.
- [7] Петров А. И., Смолянин В. Г. Расчет нестационарных волн на поверхности тяжелой жидкости конечной глубины // Прикл. матем. и механ., 1993, т.57, N 4, с.137-143.
- [8] Craig W., Sulem C. Numerical simulation of gravity waves, J. Comput. Phys. 108 (1993), p. 73–83.
- [9] Tsai W., Yue D. Computations of nonlinear free-surface flows, Annu. Rev. Fluid Mech. 28, (1996), p. 249–278.
- [10] Zakharov V. E., Dyachenko A. I., Vasilyev O. A. New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface // European Journal of Mechanics B/Fluids 21, 2002, p. 283–291.
- [11] Дьяченко А. И., Захаров В. Е., Кузнецов Е. А. Нелинейная динамика свободной поверхности идеальной жидкости // Физика плазмы, 1999, т. 22, N 10, с. 916–928.
- [12] Захаров В. Е. // ЖПМТФ, 1968, N 2, с. 190.
- [13] Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, М., 1988.
- [14] Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач, М., 1981.
- [15] Василенко В. А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы, Новосибирск, 1983.
- [16] Корнейчук Н. П. Сплайны в теории приближений, М., 1984.
- [17] Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения, М., 1972.
- [18] Куркин А. А., Пеленовский Е. Н. Волны-убийцы: факты, теория и моделирование, Нижний Новгород, 2004.