ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2010, том 432, № 4, с. 458–460

МАТЕМАТИКА

УДК 532.5

РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ВОЛНЫ МИНИМАЛЬНОЙ ГЛАДКОСТИ

© 2010 г. Р. В. Шамин

Представлено академиком В.Е. Захаровым 18.12.2009 г.

Поступило 22.12.2009 г.

Работа посвящена уравнениям, описывающим нестационарное течение идеальной жидкости со свободной поверхностью. Теоремы о существовании решений уравнений, описывающих поверхностные волны идеальной жидкости, рассматривались в [1–5]. В этих работах решения изучались в пространствах аналитических функций либо в пространствах Соболева, что накладывает определенные условия гладкости на профиль поверхностных волн. С другой стороны, в натурных и вычислительных экспериментах наблюдается образование негладких особенностей на поверхности идеальной жидкости. Поэтому вопрос о существовании решений уравнений вплоть до обрушения поверхностных волн является актуальным.

В настоящем сообщении рассматриваются точные уравнения, описывающие поверхностные волны идеальной жидкости, решения которых существуют вплоть до момента нарушения физических свойств свободной поверхностью. Нами установлено, что решение существует до тех пор, пока профиль поверхности является кривой Жордана, т.е. непрерывной кривой без самопересечений. Ключевой идеей является использование уравнений в конформных переменных для описания динамики поверхностных волн. Впервые подобные уравнения, разрешенные относительно производных по времени, получены в работе [6] (см. также [7]). Будем изучать уравнения в конформных переменных в модифицированной форме, полученные в работе [8]. Заметим, что эти уравнения эквивалентны уравнению Эйлера в области со свободной границей. Уравнения из работы [8] оказались очень удобны для проведения численных расчетов и для теоретического изучения.

Введем подмножество комплексной плоскости

$$\Omega_s^q = \{w = u + iv\colon |v - s| < q,\ 0 < u < 2\pi\},$$

$$s \in \mathbb{R},\quad q > 0.$$

Институт океанологии им. П.П. Ширшова Российской Академии наук, Москва

Введем шкалу функциональных пространств E_s^q, $s \in \mathbb{R}$, $q > 0$, как пополнение функций вида

$$A(w) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{-ikw},$$

где $w \in \Omega_s^q$ по норме

$$\|A\|_{E_s^q} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 (1 + k^2) e^{2(sk + q|k|)}\right)^{1/2}.$$

Т е о р е м а 1. *Функция A принадлежит E_s^q тогда и только тогда, когда функция $A(w)$ аналитична в области Ω_s^q, 2π-периодичная по переменной u, $A(u + iv) \in H^1(0, 2\pi)$ при всех $v \in [s - q, s + q]$. Кроме того, имеет место равенство*

$$\|A\|_{E_s^q} = \max_{|v - s| \le q} \|A(u + iv)\|_{H^1(0, 2\pi)}.$$

Здесь $H^1(0, 2\pi)$ – пространство Соболева.

Пусть идеальная несжимаемая жидкость занимает область в плоскости (x, y), ограниченную свободной поверхностью

$$-\infty < y < \eta(x, t),\quad -\infty < x < \infty,\quad t > 0.$$

Считая движение жидкости потенциальным, имеем

$$\mathbf{v}(x, y, t) = \nabla\phi(x, y, t),$$

где $\mathbf{v}(x, y, t)$ – двумерное поле скоростей, $\phi(x, y, t)$ – потенциал. Введем величину $\Psi(x, t) = \phi(x, \eta(x, t), t)$, которая является значением потенциала на свободной поверхности.

Совершим конформное отображение области, занимаемой жидкостью в плоскости (x, y), в полуплоскость в переменных (u, v)

$$-\infty < u < \infty,\quad -\infty < v < 0.$$

После преобразования поверхность $\eta(x, t)$ может быть представлена в параметрическом виде

$$x = u + \tilde{x}(u, t),\quad y = y(u, t),$$

где $\tilde{x}(u, t)$ и $y(u, t)$ связаны оператором Гильберта

$$y = \mathrm{H}[\tilde{x}],\quad \tilde{x} = -\mathrm{H}[y],$$

$$\mathrm{H}[f](u) = \frac{1}{\pi}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(u')du'}{u'-u}.$$

Образуем пару комплексных функций $z(w, t) = x(w, t) + iy(w, t)$ и на действительной оси $\Phi(u, t) = \Psi(u, t) + i\mathrm{H}[\Psi(u, t)]$, где $w = u + iv$. Введем новые переменные $R(w, t)$ и $V(w, t)$ по следующим формулам:

$$R(w, t) = \frac{1}{z_w}, \quad V(w, t) = i\frac{\Phi_w}{z_w}.$$

Функции R и V аналитичные в нижней полуплоскости и удовлетворяют следующим условиям:

$$R(w, t) \to 1, \quad |w| \to \infty, \quad \mathrm{Im}\, w \le 0,$$

$$V(w, t) \to 0, \quad |w| \to \infty, \quad \mathrm{Im}\, w \le 0.$$

Как показано в работе [8], функции R и V удовлетворяют следующей системе интегродифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\dot{R}_1 &= U_1'R_2 + U_2'R_1 - U_1R_2' - U_2R_1',\\
\dot{R}_2 &= U_1R_1' + U_2R_2' - U_1'R_1 + U_2'R_2,\\
\dot{V}_1 &= B_1'R_2 + B_2'R_1 - U_1V_2' - U_2V_1' + g(R_1 - 1),\\
\dot{V}_2 &= U_1V_1' + U_2V_2' - B_1'R_1 + B_2'R_2 + gR_2,
\end{aligned} \tag{1}$$

где $U = \mathrm{P}(V\bar{R} + \bar{V}R)$, $B = \mathrm{P}(V, \bar{V})$, $\mathrm{P} = \dfrac{I + i\mathrm{H}}{2}$ – интегральный оператор, $R = R_1 + iR_2$, $V = V_1 + iV_2$, $U = U_1 + iU_2$, $B = B_1 + iB_2$. Разрешимость этих уравнений рассматривалась в работах [5, 9].

Будем рассматривать уравнения (1) с условиями периодичности по переменной u.

Через $\mathbf{E}_s^q$ обозначим пространство $\prod_{l=1}^{4} E_s^q$. Будем использовать обозначение $W = [R_1, R_2, V_1, V_2]^T$.

Определение 1. Функция $W(t) = [R_1(t), R_2(t), V_1(t), V_2(t)]^T$, аналитичная на $(0, T)$ со значениями в $\mathbf{E}_s^q$ при некоторых $s \in \mathbb{R}$, $q > 0$, называется аналитичным решением задачи (1), если W удовлетворяет (1).

Однако не каждое аналитичное решение из шкалы пространств $\mathbf{E}_s^q$ будет соответствовать физической модели, описывающей поверхностные волны идеальной жидкости. Поэтому аналитичные решения называем формальными решениями. Среди формальных решений можно выделить подмножество решений, которые будем называть физическими решениями.

Пусть $R(u, t) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k(t)e^{-iku}$, где $r_0 = 1$. Тогда последовательность $c_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots$, определим как решение системы

$$c_0 = 1,$$

$$\sum_{j=0}^{k} c_{k-j}(t)r_j(t) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Эта система получается при формальном делении $\frac{1}{R}$. Поскольку эта система является диагональной, то ее решение может быть получено по рекуррентным формулам.

Определение 2. Формальное решение R, V называется физическим решением на $[T_1, T_2]$, если выполнены следующие условия:

1) функции R, V являются аналитичными в нижней полуплоскости при всех $t \in [T_1, T_2]$;

2) функция, определенная по формуле

$$z(u, t) = u + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{-ik}c_k(t)e^{-iku},$$

является непрерывной по u функцией при всех $t \in [T_1, T_2]$;

3) кривая, заданная как геометрическое место точек

$$\Gamma(t) = \{(x, y): x \in \mathrm{Re}\, z(u, t),\ y = \mathrm{Im}\, z(u, t),\ u \in [0, 2\pi]\},$$

является кривой Жордана, т.е. непрерывной и без точек самопересечения, причем $\mathrm{Re}\, z(0, t) = 0$, $\mathrm{Re}\, z(2\pi, t) = 2\pi$ и $\mathrm{Im}\, z(0, t) = \mathrm{Im}(2\pi, t)$ при всех $t \in [T_1, T_2]$.

Функции $R(u, t)$ и $V(u, t)$ будем называть физическим решением при $t = t_0$, если эти функции являются физическим решением на $[t_0, t_0]$.

Следующая теорема устанавливает, что уравнения (1) описывают динамику поверхностных волн вплоть до потери решениями условий непрерывности и отсутствия самопересечений, допуская при этом образование угловых точек и потерю дифференцируемости, что соответствует физической постановке задачи.

Теорема 2. *Пусть начальное значение* $W(0) \in \mathbf{E}_s^q$, $s > 0$, *является физическим решением. Тогда существует такое* $0 < T \le \infty$, *что при любом* $0 \le \varepsilon_1 \le T$ *на* $[0, T - \varepsilon_1]$ *существует физическое решение и при любом* $\varepsilon_2 > 0$ *не существует физического решения на* $[0, T + \varepsilon_2]$.

Приведенные в работе результаты были использованы при проведении доказательных вычислительных экспериментов при моделировании поверхностных волн экстремальной амплитуды (волн-убийц) [10, 11].

Автор выражает благодарность академику В.Е. Захарову за постановку задачи и внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта НШ–7550.2006.2, гранта РФФИ № 09–05–13605–офи_ц и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН "Математические методы в нелинейной динамике".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Налимов В.И.* // Динамика сплошной среды. 1974. Т. 18. С. 104–210.
2. *Налимов В.И.* // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37. № 6. С. 1356–1366.
3. *Wu S.* // Invent. Math. 1997. V. 130. P. 39–72.
4. *Lannes D.* // J. Amer. Math. Soc. 2005. V. 18. № 3. P. 605–654.
5. *Шамин Р.В.* // ДАН. 2006. Т. 406. № 5. С. 112–113.
6. *Овсянников Л.В.* Динамика сплошной среды. Сб. науч. тр. Новосибирск: АН СССР, Сиб. отд-ние; Ин-т гидродинамики, 1973. В. 15. С. 104–125.
7. *Налимов В.И., Пухначев В.В.* Неустановившиеся движения идеальной жидкости со свободной границей. Новосибирск: НГУ, 1975.
8. *Zakharov V.E., Dyachenko A.I., Vasilyev O.A.* // Europ. J. Mech. B. Fluids. 2002. V. 21. P. 283–291.
9. *Шамин Р.В.* Вычислительные эксперименты в моделировании поверхностных волн в океане. М.: Наука, 2008.
10. *Zakharov V.E., Dyachenko A.I., Prokofiev A.O.* // Europ. J. Mech. B. Fluids. 2006. V. 25. P. 677–692.
11. *Dyachenko A.I., Zakharov V.E.* // Письма в ЖЭТФ. 2008. Т. 88. № 5. С. 356–359.