

УДК 532.5

## ОБ ОЦЕНКЕ ВРЕМЕНИ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩЕГО ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ

© 2008 г. Р. В. Шагин

Представлено академиком В.Е. Захаровым 05.12.2006 г.

Поступило 11.12.2006 г.

В работе изучаются уравнения, описывающие нестационарное течение идеальной жидкости со свободной поверхностью. Задачи, описывающие поверхностные волны идеальной жидкости, рассматривали многие авторы, см. например, [1–7]. Были рассмотрены вопросы о корректности постановки задач в пространствах аналитических функций и пространствах Соболева, были установлены теоремы о существовании решений на достаточно малом временном интервале. Кроме того, из физического смысла очевидно, что в этих задачах не может быть глобальных по времени решений для всех начальных значений. Численные эксперименты также подтверждают факты обрушения волн и образования особенностей у решений за конечное время. Проблема оценки времени существования решений, описывающих поверхностные волны в идеальной жидкости, является принципиальной при исследовании нелинейной динамики поверхностных волн в океанологии.

В настоящей работе рассматривается система интегродифференциальных уравнений, эквивалентная системе уравнений Эйлера со свободной поверхностью. Рассматриваемая система была получена в работах В.Е. Захарова и А.И. Дьяченко. Эти уравнения исключительно удобны для численного моделирования (см. [6]). В частности, прямым численным моделированием рассмотрено возникновение интересного (и сложного) океанологического явления волны-убийцы. Таким образом, было показано, что волны-убийцы могут возникать вследствие нелинейных эффектов в уравнениях, описывающих течение идеальной жидкости со свободной поверхностью. Однако для этих и других численных экспериментов требуется математическое обоснование. В работе [7] установлена корректность уравнений Дьяченко, в статье [8] приведены численные схемы, для которых доказана сходимости к точному решению в

случае, когда точное решение существует на рассматриваемом временном интервале. В настоящей работе приведены методы, позволяющие конструктивно оценивать время существования решений уравнения Дьяченко для заданных начальных данных.

Рассмотрим нестационарное двумерное течение идеальной жидкости со свободной поверхностью с бесконечной глубиной. Пусть в плоскости  $(x, y)$  жидкость занимает периодическую по переменной  $x$  область, ограниченную свободной поверхностью

$$-\infty < y < \eta(x, t),$$

$$0 < x < 2\pi, \quad t \geq 0.$$

Считая течение жидкости потенциальным, имеем следующее уравнение на потенциал скоростей:

$$\Delta\Phi(x, y, t) = 0. \quad (1)$$

С уравнением (1) связываются следующие граничные и начальные условия:

$$(\eta_t + \Phi_x \eta_x - \Phi_y)|_{y=\eta(x,t)} = 0, \quad (2)$$

$$\left( \Phi_t + \frac{1}{2} |\nabla\Phi|^2 + gy \right) \Big|_{y=\eta(x,t)} = 0, \quad (3)$$

$$\Phi_y|_{y=-\infty} = 0, \quad (4)$$

$$\eta|_{t=0} = \eta_0(x), \quad \Phi|_{t=0} = \Phi_0(x, y). \quad (5)$$

Здесь  $g$  – ускорение поля тяжести.

Для непосредственного решения задача (1)–(5) весьма сложна. Вместо этой задачи мы рассмотрим систему уравнений Дьяченко, полученную в работе [6] относительно двух функций  $R = 1 +$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} r_k e^{-iku} \text{ и } V = \sum_{k=1}^{\infty} v_k e^{-iku}$$

$$R_t(u, t) = i(U(u, t)R_u(u, t) - U_u(u, t)R(u, t)),$$

$$V_t(u, t) = i(U(u, t)V_u(u, t) - B_u(u, t)R(u, t)) +$$

$$+ g(R(u, t) - 1), \quad (6)$$

$$0 < u < 2\pi, \quad 0 < t < T,$$

$$R(0, t) = R(2\pi, t), \quad V(0, t) = V(2\pi, t), \quad 0 < t < T,$$

$$R(u, 0) = R_0(u), \quad V(u, 0) = V_0(n), \quad 0 < u < 2\pi,$$

где  $U = P(V\bar{R} + \bar{V}R)$ ,  $B = P(V\bar{V})$ ,  $P = \frac{1}{2}(I + i\mathcal{H})$ .

Здесь  $\mathcal{H}$  – оператор Гильберта,

$$\mathcal{H}[f](u) = \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_0^{2\pi} \text{ctg} \frac{u' - u}{2} f(u') du'.$$

Зная комплекснозначные функции  $R$  и  $V$ , можно восстановить функции  $\eta$  и  $\Psi$ , см. [6].

Введем шкалу пространств функций следующим образом:

$$E_s = \left\{ f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k e^{-iku}; \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|^2 e^{2ks} < \infty \right\}, \quad s > 0.$$

Это пространство состоит из функций, допускающих аналитическое продолжение в область  $\{z \in \mathbb{C}; \text{Im} z < s\}$ . Решением задачи (6) будем называть пару функций  $R, V \in C^1([0, T]; E_s)$ , удовлетворяющую (6).

Для функции  $W \in E_s$  через  $w_k$  будем обозначать коэффициенты Фурье. Введем функцию на элементах пространства  $E_s$  следующим образом:

$$v(W) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |w_k|}{k}, \quad \text{допуская значения } v = -\infty.$$

В случае, когда существует такой номер  $K$ , что  $w_k = 0$  при  $k > K$ , полагаем  $v(W) = -\infty$ . Введем еще функцию  $v_k(W)$ , заданную на элементах  $E_s$ , следующим образом:

$$v_k(W) = \begin{cases} \frac{\ln |w_k|}{k}, & w_k \neq 0, \\ -\infty, & w_k = 0. \end{cases}$$

**Теорема 1.** Пусть  $\lim_{N \rightarrow \infty} \|W^N - W\|_{E_s} = 0$  для

$W \in E_s$ . Предположим, что  $v(W) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |w_k|}{k} = -s \neq -\infty$ .

Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует константа  $C_\varepsilon > 0$ , не зависящая от  $N$  и  $k$ , такая, что

$$|v_k(W^N) - v(W)| \leq C_\varepsilon \frac{1}{k} + \varepsilon, \quad k \leq N,$$

исключая  $k, N$ , для которых  $W = 0$ .

Теорема 1 позволяет производить оценку времени существования решений задачи (6). Пусть начальные условия  $R_0, V_0$  принадлежат  $E_{s_1}$ ,  $s_1 > 0$ . В силу теоремы 1 из [7] для любого  $0 < s_0 < s_1$  существует  $T_{s_0} > 0$  такое, что на  $[0, T_{s_0}]$  существует единственное решение задачи (6)  $R, V \in E_{s_0}$ . Методы построения приближенных решений  $R^N$  и  $V^N$  описаны в работе [8]. Таким образом, наряду с функциями  $R^N$  и  $V^N$  можно вычислять функции  $v(R^N)$  и  $v(V^N)$ . Поскольку константа  $C_\varepsilon$  не зависит от  $N$  и  $k$ , то можно оценивать  $v(R)$  и  $v(V)$ , следя за тем, чтобы

$$\max\{|v(R)|, |v(V)|\} > s_0 + \varepsilon. \quad (7)$$

Согласно теоремам о существовании решений, можно гарантировать существование решения на отрезке  $[0, T]$ , на котором выполнено условие (7).

Изложенный метод оценки времени существования успешно применялся в исследованиях в Институте океанологии им. П.П. Ширшова РАН и Институте теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН.

Автор выражает искреннюю благодарность академику В.Е. Захарову за постановку задачи и внимание к работе и профессору Ю.А. Дубинскому за полезное обсуждение.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов НШ-7550.2006.2, РФФИ 04-05-64784 и программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Математические методы в нелинейной динамике”.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Налимов В.И.* // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37. № 6. С. 1356–1366.
2. *Налимов В.И.* // Динамика сплош. среды. 1974. В. 18. С. 104–210.
3. *Wu S.* // J. Amer. Math. Soc. 1999. V. 12. № 2. P. 445–495.
4. *Craig W., Sulem C.* // J. Comput. Phys. 1993. V. 108. P. 73–83.
5. *Дьяченко А.И., Захаров В.Е., Кузнецов Е.А.* // Физика плазмы. 1999. Т. 22. № 10. С. 916–928.
6. *Zakharov V.E., Dyachenko A.I., Vasilyev O.A.* // Europ. J. Mech. B. 2002. V. 21. P. 283–291.
7. *Шамин Р.В.* // ДАН. 2006. Т. 406. № 5. С. 112–113.
8. *Шамин Р.В.* // Сиб. журн. вычисл. математики. 2006. Т. 9. № 4. С. 379–389.