ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2008, том 418, № 5, с. 603–604

## МАТЕМАТИКА

УДК 532.5

# ОБ ОЦЕНКЕ ВРЕМЕНИ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩЕГО ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ

© 2008 г. Р. В. Шамин

Представлено академиком В.Е. Захаровым 05.12.2006 г.

Поступило 11.12.2006 г.

В работе изучаются уравнения, описывающие нестационарное течение идеальной жидкости со свободной поверхностью. Задачи, описывающие поверхностные волны идеальной жидкости, рассматривали многие авторы, см. например, [1–7]. Были рассмотрены вопросы о корректности постановки задач в пространствах аналитических функций и пространствах Соболева, были установлены теоремы о существовании решений на достаточно малом временном интервале. Кроме того, из физического смысла очевидно, что в этих задачах не может быть глобальных по времени решений для всех начальных значений. Численные эксперименты также подтверждают факты обрушения волн и образования особенностей у решений за конечное время. Проблема оценки времени существования решений, описывающих поверхностные волны в идеальной жидкости, является принципиальной при исследовании нелинейной динамики поверхностных волн в океанологии.

В настоящей работе рассматривается система интегродифференциальных уравнений, эквивалентная системе уравнений Эйлера со свободной поверхностью. Рассматриваемая система была получена в работах В.Е. Захарова и А.И. Дьяченко. Эти уравнения исключительно удобны для численного моделирования (см. [6]). В частности, прямым численным моделированием рассмотрено возникновение интересного (и сложного) океанологического явления волны-убийцы. Таким образом, было показано, что волны-убийцы могут возникать вследствие нелинейных эффектов в уравнениях, описывающих течение идеальной жидкости со свободной поверхностью. Однако для этих и других численных экспериментов требуется математическое обоснование. В работе [7] установлена корректность уравнений Дьяченко, в статье [8] приведены численные схемы, для которых доказана сходимость к точному решению в случае, когда точное решение существует на рассматриваемом временном интервале. В настоящей работе приведены методы, позволяющие конструктивно оценивать время существования решений уравнения Дьяченко для заданных начальных данных.

Рассмотрим нестационарное двумерное течение идеальной жидкости со свободной поверхностью с бесконечной глубиной. Пусть в плоскости $(x, y)$ жидкость занимает периодическую по переменной $x$ область, ограниченную свободной поверхностью

$$-\infty < y < \eta(x, t),$$
$$0 < x < 2\pi, \quad t \geq 0.$$

Считая течение жидкости потенциальным, имеем следующее уравнение на потенциал скоростей:

$$\Delta\Phi(x, y, t) = 0. \tag{1}$$

С уравнением (1) связываются следующие граничные и начальные условия:

$$(\eta_t + \Phi_x\eta_x - \Phi_y)|_{y = \eta(x, t)} = 0, \tag{2}$$

$$\left(\Phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + gy\right)\Big|_{y = \eta(x, t)} = 0, \tag{3}$$

$$\Phi_y|_{y = -\infty} = 0, \tag{4}$$

$$\eta|_{t = 0} = \eta_0(x), \quad \Phi|_{t = 0} = \Phi_0(x, y). \tag{5}$$

Здесь $g$ – ускорение поля тяжести.

Для непосредственного решения задача (1)–(5) весьма сложна. Вместо этой задачи мы рассмотрим систему уравнений Дьяченко, полученную в работе [6] относительно двух функций $R = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k e^{-iku}$ и $V = \sum_{k=1}^{\infty} v_k e^{-iku}$

$$R_t(u, t) = i(U(u, t)R_u(u, t) - U_u(u, t)R(u, t)),$$

$$V_t(u, t) = i(U(u, t)V_u(u, t) - B_u(u, t)R(u, t)) +$$

Институт океанологии им. П.П. Ширшова Российской Академии наук, Москва

$$+ g(R(u, t) - 1),$$
$$0 < u < 2\pi, \quad 0 < t < T, \tag{6}$$

$$R(0, t) = R(2\pi, t), \ V(0, t) = V(2\pi, t), \ 0 < t < T,$$

$$R(u, 0) = R_0(u), \quad V(u, 0) = V_0(n), \quad 0 < u < 2\pi,$$

где $U = P(V\bar{R} + \bar{V}R)$, $B = P(V\bar{V})$, $P = \frac{1}{2}(I + i\mathcal{H})$. Здесь $\mathcal{H}$ – оператор Гильберта,

$$\mathcal{H}[f](u) = \frac{1}{2\pi}\text{v.p.}\int_0^{2\pi} \text{ctg}\frac{u' - u}{2}f(u')du'.$$

Зная комплекснозначные функции $R$ и $V$, можно восстановить функции $\eta$ и $\Psi$, см. [6].

Введем шкалу пространств функций следующим образом:

$$E_s = \left\{ f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k e^{-iku} \colon \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|^2 e^{2ks} < \infty \right\}, \quad s > 0.$$

Это пространство состоит из функций, допускающих аналитическое продолжение в область$\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im} z < s\}$. Решением задачи (6) будем называть пару функций $R$, $V \in C^1([0, T]; E_s)$, удовлетворяющую (6).

Для функции $W \in E_s$ через $w_k$ будем обозначать коэффициенты Фурье. Введем функцию на элементах пространства $E_s$ следующим образом: $v(W) = \limsup\limits_{k \to \infty}\frac{\ln|w_k|}{k}$, допуская значения $v = -\infty$. В случае, когда существует такой номер $K$, что $w_k = 0$ при $k > K$, полагаем $v(W) = -\infty$. Введем еще функцию $v_k(W)$, заданную на элементах $E_s$, следующим образом:

$$v_k(W) = \begin{cases} \dfrac{\ln|w_k|}{k}, & w_k \neq 0, \\ -\infty, & w_k = 0. \end{cases}$$

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\lim\limits_{N \to \infty} \| W^N - W \|_{E_s} = 0$ *для* $W \in E_s$. *Предположим, что* $v(W) = \lim\limits_{k \to \infty}\frac{\ln|w_k|}{k} = -s \neq -\infty$.

*Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует константа* $C_\varepsilon > 0$, *не зависящая от* $N$ *и* $k$, *такая, что*

$$\left|v_k(W^N) - v(W)\right| \le C_\varepsilon\frac{1}{k} + \varepsilon, \quad k \le N,$$

*исключая* $k$, $N$, *для которых* $W = 0$.

Теорема 1 позволяет производить оценку времени существования решений задачи (6). Пусть начальные условия $R_0$, $V_0$ принадлежат $E_{s_1}$, $s_1 > 0$. В силу теоремы 1 из [7] для любого $0 < s_0 < s_1$ существует $T_{s_0} > 0$ такое, что на $[0, T_{s_0}]$ существует единственное решение задачи (6) $R$, $V \in E_{s_0}$. Методы построения приближенных решений $R^N$ и $V^N$ описаны в работе [8]. Таким образом, наряду с функциями $R^N$ и $V^N$ можно вычислять функции $v(R^N)$ и $v(V^N)$. Поскольку константа $C_\varepsilon$ не зависит от $N$ и $k$, то можно оценивать $v(R)$ и $v(V)$, следя за тем, чтобы

$$\max\{|v(R)|, |v(V)|\} > s_0 + \varepsilon. \tag{7}$$

Согласно теоремам о существовании решений, можно гарантировать существование решения на отрезке $[0, T]$, на котором выполнено условие (7).

Изложенный метод оценки времени существования успешно применялся в исследованиях в Институте океанологии им. П.П. Ширшова РАН и Институте теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН.

Автор выражает искреннюю благодарность академику В.Е. Захарову за постановку задачи и внимание к работе и профессору Ю.А. Дубинскому за полезное обсуждение.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов НШ–7550.2006.2, РФФИ 04–05–64784 и программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Математические методы в нелинейной динамике”.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Налимов В.И.* // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37. № 6. С. 1356–1366.
2. *Налимов В.И.* // Динамика сплош. среды. 1974. В. 18. С. 104–210.
3. *Wu S.* // J. Amer. Math. Soc. 1999. V. 12. № 2. P. 445–495.
4. *Craig W., Sulem C.* // J. Comput. Phys. 1993. V. 108. P. 73–83.
5. *Дьяченко А.И., Захаров В.Е., Кузнецов Е.А.* // Физика плазмы. 1999. Т. 22. № 10. С. 916–928.
6. *Zakharov V.E., Dyachenko A.I., Vasilyev O.A.* // Europ. J. Mech. B. 2002. V. 21. P. 283–291.
7. *Шамин Р.В.* // ДАН. 2006. Т. 406. № 5. С. 112–113.
8. *Шамин Р.В.* // Сиб. журн. вычисл. математики. 2006. Т. 9. № 4. С. 379–389.