ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2006, том 406, № 5

МАТЕМАТИКА

УДК 532.5

О СУЩЕСТВОВАНИИ ГЛАДКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДЬЯЧЕНКО, ОПИСЫВАЮЩИХ НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

© 2006 г. Р. В. Шамин

Представлено академиком В.Е. Захаровым 03.06.2005 г.

Поступило 06.06.2005 г.

Пусть идеальная несжимаемая жидкость занимает область в плоскости (x, y), ограниченную свободной поверхностью

$$-\infty < y \le \eta(x, t),$$
$$-\infty < x < \infty, \quad t > 0.$$

Считая движение жидкости потенциальным, имеем $u(x, y, t) = \nabla\Phi(x, y, t)$, где $\mathbf{v}(x, y, t)$ – двумерное поле скоростей, $\Phi(x, y, t)$ – потенциал. Всюду в данной работе операторы градиента и Лапласа применяются лишь по пространственным переменным x, y. Из условия несжимаемости жидкости $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ следует, что потенциал скоростей подчиняется уравнению Пуассона

$$\Delta\Phi(x, y, t) = 0. \tag{1}$$

С уравнением (1) связываются следующие граничные и начальные условия:

$$(\eta_t + \Phi_x\eta_x - \Phi_y)\big|_{y = \eta(x,t)} = 0, \tag{2}$$

$$\left(\Phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + gy\right)\Big|_{y = \eta(x,t)} = 0, \tag{3}$$

$$\Phi_y\big|_{y = -\infty} = 0, \tag{4}$$

$$\eta\big|_{t = 0} = \eta_0(x), \tag{5}$$

$$\Phi\big|_{t = 0} = \Phi_0(x,y),$$

где g – ускорение свободного падения.

Первые результаты о существовании аналитических решений в этих задачах получены в работе [1]. Существование решений конечной гладкости доказано в [2, 3].

В различных работах рассматривались методы численного нахождения решений (см. [4–6]). Однако при численном моделировании задач со свободной поверхностью исходные уравнения (η, Φ) не очень удобны.

В работах [7, 8] для изучения задачи со свободной поверхностью применялась техника конформных преобразований. Были получены системы интегродифференциальных уравнений, разрешенные относительно производных по времени. В работе [8] получены эквивалентные уравнения, названные уравнениями Дьяченко. Эти уравнения оказались очень удобными для численного решения.

В настоящей работе доказано существование аналитических решений уравнений Дьяченко на достаточно малом временном интервале. Показано также, что эти решения на вещественной оси принадлежат пространствам Соболева, что важно для обоснования численных методов.

Для положительного s обозначим неограниченную область $Q_s = \{w = u + iv \in \mathbb{C}: 0 < u < 2\pi, -\infty < v < s\}$, через E_s^0 обозначим пространство аналитических в Q_s функций, интегрируемых с квадратом в Q_s, которые 2π-периодичны по u. Пространство E_s^0 со скалярным произведением

$$(f,g)_{E_s^0} = \int\limits_{Q_s} f(w)\overline{g(w)}dw$$

является гильбертовым пространством (см. [9, гл. 1, теорема 1]).

Пусть $f(w) \in E_s^0$, тогда $f(w) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k e^{-ikw}$, где ряд сходится по норме E_s^0. Поскольку область Q_s неограниченная, то функции, равные константе, не принадлежат E_s^0. Введем пространство $E_s = E_s^0 + \mathbb{R}$ с нормой $\|f\|_{E_s} = \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} |f_k|^2\right)$.

Институт океанологии им. П.П. Ширшова Российской Академии наук, Москва

Введем оператор Р: $E_s \times E_s \to E_s$, пусть $A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-ikw}$, $B = \sum_{k=0}^{\infty} b_k e^{-ikw}$, тогда

$$\mathrm{P}(A, B) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{kv} e^{-iku}, \qquad (6)$$

где $c_k = \sum_{m=k}^{\infty} a_m \bar{b}_{m-k}$.

Будем рассматривать уравнения Дьяченко:

$$\begin{aligned} R_t &= i(UR' - U'R), \quad w \in Q_s, \quad t \in (0, T), \\ V_t &= i(UV' - B'R) + g(R-1), \end{aligned} \qquad (7)$$

где $U = \mathrm{P}(R, V) + \mathrm{P}(V, R)$, $B = \mathrm{P}(V, V)$, штрихом обозначена производная по комплексному переменному w. Уравнения (7) рассматриваются со следующими граничными условиями:

$$\begin{gathered} R, V - 2\pi\text{-периодичны по } u, \\ |R| \to 1, \quad |V| \to 0, \quad u \to -\infty, \quad v < 0 \end{gathered} \qquad (8)$$

и начальными условиями

$$R(w, 0) = R_0(w), \quad V(w, 0) = V_0(w), \quad w \in Q_s. \qquad (9)$$

Начальные функции предполагаются из класса E_s.

Определение 1. *Функции R, V, аналитичные по t со значениями в E_s, называются аналитичным решением задачи* (7)–(9), *если эти функции удовлетворяют* (7)–(9).

Теорема 1. *Пусть $R_0, V_0 \in E_{s_1}$, $s_1 > 0$, тогда для любого $0 < s < s_1$ существует $T(s) > 0$ такое, что задача* (7)–(9) *имеет единственное аналитическое решение $R, V \in E_s$ при $t < T(s)$.*

Доказательство теоремы опирается на теорему Ниренберга–Нисиды (см., [10], с. 220).

При численном моделировании удобно работать с решениями на вещественной оси в пространствах Соболева.

Введем функциональные пространства. Пусть $\Omega = (0, 2\pi) \times (0, T)$, $0 < T < \infty$ – прямоугольник на плоскости (u, t). Мы будем обозначать через $W_2^k(\Omega)$ пространство Соболева комплекснозначных функций из $L_2(\Omega)$, имеющих все обобщенные производные вплоть до k-го порядка из $L_2(\Omega)$, с нормой

$$\|u\|_{W_2^k(\Omega)} = \left\{ \sum_{|\alpha| \le k} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 2. *Пусть R, V – аналитическое решение при $t < T$.*

Тогда при $v = 0$ $R, V \in W_2^k(\Omega)$ для любого $k \ge 1$.

Автор выражает искреннюю благодарность академику В.Е. Захарову и А.И. Дьяченко за постановку задачи и внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 04–05–64784, 04–01–00256) и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Математические методы в нелинейной динамике”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Налимов В.И.* // ДАН. 1969. Т. 189. № 1. С. 45–49.
2. *Налимов В.И.* // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37. № 6. С. 1356–1366.
3. *Налимов В.И.* // Динамика сплош. среды. 1974. В. 18. С. 104–210.
4. *Воинов В.В., Воинов О.В.* // ДАН. 1975. Т. 221. № 3. С. 559–562.
5. *Петров А.И., Смолянин В.Г.* // ПММ. 1993. Т. 57. № 1. С. 137–143.
6. *Гарипов Р.М.* // ДАН. 1965. Т. 161. № 3. С. 547–550.
7. *Дьяченко А.И., Захаров В.Е., Кузнецов Е.А.* // Физика плазмы. 1999. Т. 22. № 10. С. 916–928.
8. *Zakharov V.E., Dyachenko A.I., Vasilyev O.A.* // Europ. J. Mech. B. Fluids. 2002. V. 21. P. 283–291.
9. *Гайер Д.* Лекции по теории аппроксимации в комплексных областях. М.: Мир, 1986. 216 с.
10. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. М.: Мир, 1977. 232 с.