

О вероятности возникновения волн-убийц

В. Е. Захаров¹⁾, Р. В. Шамин¹⁾

Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия

Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, 117997 Москва, Россия

Department of Mathematics, University of Arizona, 857201 Tucson, USA

Поступила в редакцию 14 декабря 2009 г.

Изучается статистика возникновения волн-убийц на поверхности идеальной тяжелой жидкости. Волны-убийцы (экстремальные волны) возникают в процессе эволюции статистически однородных начальных условий с гауссовым распределением вероятности при вариации средних крутизн от малых ($\mu^2 = 1.54 \cdot 10^{-3}$) до умеренных ($\mu^2 = 3.08 \cdot 10^{-3}$). Частоты возникновения экстремальных волн уменьшаются с ростом спектральной ширины начальных условий, однако и для широких пакетов ($A_k/k \sim 1$) остается значительной.

Сегодня уже несомненно, что волны-убийцы (экстремальные волны) закономерно возникают в результате эволюции спектрально узких пакетов гравитационных волн (см., например, [1–8]). Можно сказать, что волны-убийцы есть нелинейная стадия модуляционной неустойчивости.

В настоящей статье представлены результаты по количественному исследованию этого эффекта. Мы решали численно уравнения Эйлера, описывающие глубокую идеальную жидкость со свободной поверхностью в двумерной геометрии $0 < x < 2\pi$, $-\infty < y < \eta(x)$. Граничные условия на концах интервала $x = 0, 2\pi$ предполагались периодическими.

Течение предполагалось потенциальным, а жидкость несжимаемой,

$$v = \nabla\phi, \quad \operatorname{div} v = 0,$$

так что потенциал подчинялся уравнению Лапласа

$$\Delta\phi = 0.$$

Мы осуществляли конформное отображение области, занятой жидкостью, на нижнюю полуплоскость, координаты на которой $w = u + iv$. Отображение задается функцией $z = z(w)$, $z = x + iy$.

Динамические уравнения формулируются для переменных Дьяченко

$$R = \frac{1}{z'_w} \quad V = i \frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

и имеют вид

$$\begin{aligned} R_t(u, t) &= i(UR_u - U_uR), \\ V_t(u, t) &= i(UV_u - B_uR) + g(R - 1), \\ U &= P(VR^* + RV^*), \\ B &= P(VV^*), \end{aligned} \quad (1)$$

где P – оператор проектирования на нижнюю полуплоскость, $P = \frac{1}{2}(1 + iH)$, H – аналог оператора Гильберта для периодического случая

$$H[f](y) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_0^{2\pi} \frac{f(u')}{\tan(\frac{u'-u}{2})} du'.$$

Система (1) в настоящее время широко используется. Строгие математические результаты о разрешимости системы (1), а также описание методов ее численного решения приведены в работах [9–12].

В наших экспериментах начальные условия определялись как ансамбль бегущих в одну сторону волн со средним значением волнового числа $K_0 = 25$. Мы предполагали, что начальное возмущение поверхности задается суммой гармоник со случайными фазами

$$\eta_0(x) = \sum_{-\frac{1}{2}K_{\max}}^{\frac{1}{2}K_{\max}} \phi(k - k_0) \cos(kx - \xi_k). \quad (2)$$

Здесь K_{\max} – полное число спектральных мод, ξ_k – случайная величина, равномерно распределенная на интервале $-\frac{1}{2}K_{\max} < k < \frac{1}{2}K_{\max}$.

Начальные значения поля скоростей предполагались связанными с (2) формулами линейной теории. Конформное преобразование осуществлялось при помощи итерационного алгоритма, предложенного А.И. Дьяченко и детально описанного в [10].

¹⁾ e-mail: zakharov@math.arizona.edu, roman@shamin.ru

Функция $\phi(k)$ определялась по формуле

$$\phi(k) = \begin{cases} \delta_k, & |k| > K_w; \\ \kappa \exp(-\alpha k^2) + \delta_k, & |k| \leq K_w. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь δ_k – независимые случайные параметры, равномерно распределенные на интервале $-\frac{1}{2}K_{\max} < k < \frac{1}{2}K_{\max}$. Число $1 \leq K_w \leq 10$ определяло спектральную ширину; κ, α – “внутренние” параметры спектра, определенные так, чтобы “внешние” параметры – средняя крутизна μ ,

$$\mu^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta_x^2 dx,$$

и дисперсия D ,

$$D = \left(\int_{-K_w}^{K_w} k^2 e^{-\alpha k^2} dk \right) \left(\int_{-K_w}^{K_w} e^{-\alpha k^2} dk \right)^{-1},$$

принимали заданные значения. Далее, мы вычисляли точные значения полной энергии E и следили за тем, чтобы вклад в нее случайного шума составлял не более трех процентов. Было проделано 5000 “элементарных” экспериментов. В каждом эксперименте время менялось в интервале $0 < t < 200$, что соответствовало приблизительно 500 периодам волн. Если происходило обрушение волн, счет прекращался досрочно. В расчетах полное число гармоник было $K_{\max} = 2048$ или $K_{\max} = 4096$ в зависимости от полной энергии, которая менялась в пределах $1.5 \cdot 10^{-4} \leq E \leq 4 \cdot 10^{-4}$.

Регистрация волн-убийц производилась следующим образом. После окончания элементарного эксперимента рассчитывалась величина ν :

$$\nu = \frac{\max \eta(x, t)}{\langle |\eta| \rangle}.$$

Здесь максимум в числителе берется по координате и по времени за интервал $0 < t < T$,

$$\langle |\eta| \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \max_{x \in (0, 2\pi)} |\eta(x, t)| dt.$$

“Волна-убийца” фиксировалась, если параметр ν превышал критическое значение $\nu = 1.8$. Данное определение количественно лишь несущественно отличается от общепринятого, когда считается, что волны-убийцы вдвое превышают существенную высоту (significant wave height) Требовалось также, чтобы локальная крутизна волны $|\eta_x|$ превышала критическое значение $\max_{0 < x < 2\pi} |\eta_x| \leq 0.3$. Это требование

вызвано очевидными физическими соображениями и является весьма существенным.

Результаты экспериментов приведены в таблице. По горизонтали отложены значения дисперсии, по вертикали – значения квадрата крутизны. Число «активных» мод начального условия для каждого эксперимента также показано. Из наших данных следует, что даже для волн довольно умеренной крутизны ($\mu^2 \simeq 2.06 \cdot 10^{-3}$, $\mu \simeq 0.045$) образование экстремальной волны за столь короткий отрезок времени как 500 периодов (при периоде 10с это меньше полутора часов) есть весьма вероятное событие, даже если спектральная ширина по волновым числам сравнима с несущим волновым числом. Собственно, этот эксперимент и подчеркивает “обыденность” экстремальных волн. На рис.1 воспроизведен начальный

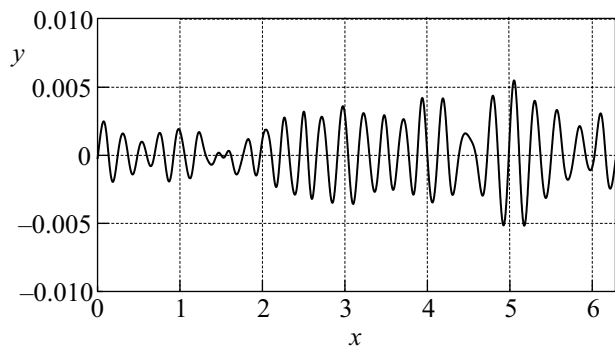


Рис.1. Профиль начальной волны. Средняя крутизна – $\mu^2 = 2.56 \cdot 10^{-3}$, дисперсия $D = 4$

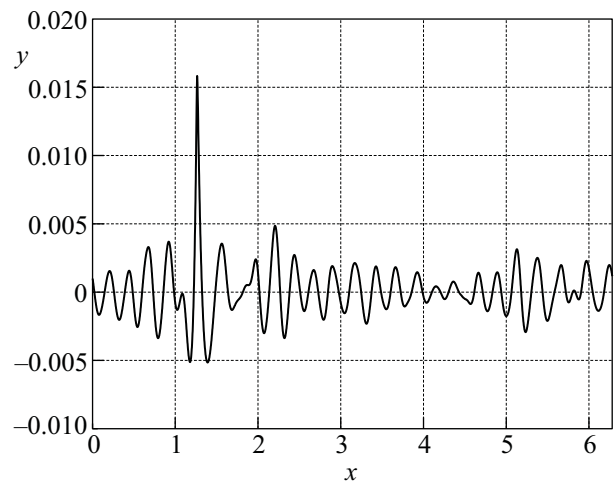


Рис.2. Профиль волны-убийцы. Время $t = 67.2$, параметр $\nu = 2.13$, максимальная крутизна – 0.558

профиль волны в ходе эволюции которой возникла волна-убийца, профиль которой показан на рис.2. На рис.3 приведена плотность импульса в момент обра-

D	$\mu^2 = 1.54 \cdot 10^{-3}$	$\mu^2 = 2.06 \cdot 10^{-3}$	$\mu^2 = 2.56 \cdot 10^{-3}$	$\mu^2 = 3.08 \cdot 10^{-3}$
$D = 0.07$ $K_w = 1$	0.141	0.638	0.828	0.849
$D = 2$ $K_w = 1$	0.152	0.457	0.616	0.554
$D = 4$ $K_w = 2$	0.011	0.231	0.346	0.272
$D = 6$ $K_w = 3$	0.000	0.192	0.305	0.246
$D = 8$ $K_w = 4$	0.011	0.154	0.280	0.195
$D = 10$ $K_w = 5$	0.022	0.125	0.247	0.186
$D = 12$ $K_w = 6$	0.010	0.173	0.256	0.172
$D = 14$ $K_w = 7$	0.000	0.058	0.216	0.170
$D = 16$ $K_w = 8$	0.000	0.136	0.208	0.151
$D = 18$ $K_w = 9$	0.000	0.118	0.219	0.134
$D = 20$ $K_w = 10$	0.034	0.127	0.206	0.099

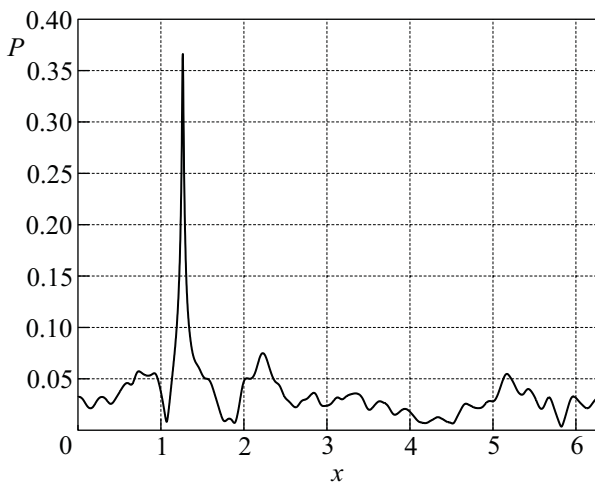


Рис.3. Плотность импульса в момент образования волны-убийцы, приведенной на рис.2

зования этой волны-убийцы. Интересно, что вероятность возникновения экстремальных волн, рассматриваемая как функция от средней крутизны при заданной дисперсии имеет максимум при весьма умеренной крутизне ($\mu^2 = 2.0 \cdot 10^{-3}$), а затем убывает при увеличении крутизны. Этот факт объясняется увеличением силы конкурирующего эффекта — обрушения волн. Используемая нами схема счета позволяет вести эксперимент только до первого обру-

шения. Мы полагаем, что при использовании более совершенных методик зависимость вероятности возникновения экстремальных волн от крутизны остается монотонной.

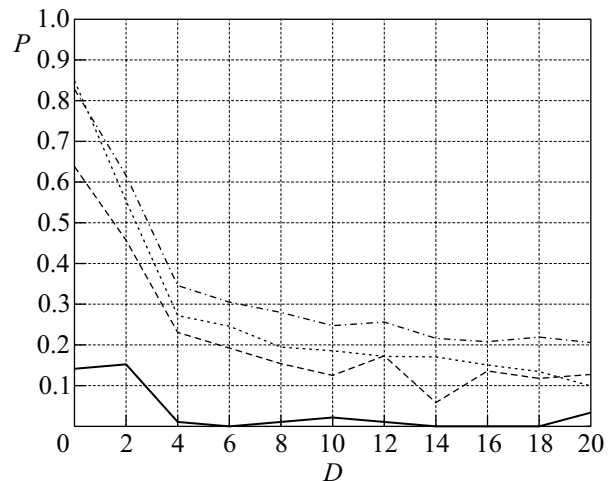


Рис.4. Частоты вероятности возникновения волны-убийцы. В зависимости от дисперсии. $\mu^2 = 1.54 \cdot 10^{-3}$ — сплошная линия, $\mu^2 = 2.56 \cdot 10^{-3}$ — “тире”, $\mu^2 = 2.06 \cdot 10^{-3}$ — точечная линия, $\mu^2 = 3.08 \cdot 10^{-3}$ — “точка-тире”

На рис.4 приведены графики частоты вероятности возникновения волн-убийц в зависимости от дисперсии.

В заключение авторы благодарят кафедру “Дифференциальные уравнения и математическая физика” РУДН и лично заведующего кафедрой проф. А.Л. Скубачевского, О.В. Савенкову и Д.А. Неверову за предоставленные вычислительные мощности. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта # НШ-7550.2006.2, гранта Российского фонда фундаментальных исследований # 09-05-13605-офи_д и Программой фундаментальных исследований Президиума РАН “Математические методы в нелинейной динамике”.

1. А. А. Куркин, Е. Н. Пелиновский, *Волны-убийцы: факты, теория и моделирование*, Нижний Новгород: Нижегородский гос. тех. университет, 2004, с. 158.
2. K. L. Henderson, D. H. Pelegrine, and J. W. Dold, *Wave Motion* **29**, 341 (1999).
3. W. J. D. Bateman, C. Swan, and P. H. Taylor, *J. Comput. Physics* **174**, 277 (2000).
4. V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and O. A. Vasilyev, *Eur. J. Mech. B Fluids* **21**, 283 (2002).
5. V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and A. O. Prokofiev, *Eur. J. Mech. B Fluids* **25**, 677 (2006).
6. V. E. Zakharov and A. I. Dyachenko, *European J. Mechanics, B Fluids*. Published online 5 November 2009.
7. V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and A. O. Prokofiev, *Freak waves: Peculiarities of numerical simulations, in “Extreme Ocean Waves”*, Eds. E. Pelinovsky and C. Harif, Springer, 2008.
8. A. I. Dyachenko and V. E. Zakharov, *Письма в ЖЭТФ* **88**, 356 (2008).
9. Р. В. Шамин, *Вычислительные эксперименты в моделировании поверхностных волн в океане*, М.: Наука, 2008, с. 133.
10. R. V. Shamin, *J. Mathematical Sciences* **160**, 537 (2009).
11. Р. В. Шамин, *Доклады Российской академии наук* **406**, 112 (2006).
12. Р. В. Шамин, *Сибирский журнал вычислительной математики* **9**, 379 (2006).