

Шамин Р.В., Геогджаев В.В.

## Статистическое исследование существования решений, описывающих поверхностные волны

Проблемам моделирования поверхностных волн идеальной жидкости посвящено много работ (например, [1], [2], [3]). Математические проблемы, возникающие при исследовании динамики идеальной жидкости со свободной поверхностью, являются достаточно сложными как для теоретического исследования, так и для проведения вычислительных экспериментов. В настоящей работе рассматривается применение статистических методов для исследования вопросов существования решений на конечном временном интервале со случайными начальными данными.

Пусть идеальная несжимаемая жидкость занимает область в плоскости  $(x, y)$ , ограниченную свободной поверхностью

$$\begin{aligned} -\infty < y \leq \eta(x, t), \\ -\infty < x < \infty, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Считая движение жидкости потенциальным, мы имеем

$$v(x, y, t) = \nabla\Phi(x, y, t),$$

где  $v(x, y, t)$  — двумерное поле скоростей,  $\Phi(x, y, t)$  — потенциал скоростей. Из условия несжимаемости жидкости  $\operatorname{div} v = 0$  следует, что потенциал скоростей удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\Phi(x, y, t) = 0.$$

С уравнением  $\Delta\Phi = 0$  связываются следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} (\eta_t + \Phi_x \eta_x - \Phi_y)|_{y=\eta(x,t)} &= 0, \\ (\Phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + gy)|_{y=\eta(x,t)} &= 0, \\ \Phi_y|_{y=-\infty} &= 0, \end{aligned}$$

здесь  $g$  — ускорение поля тяжести.

Как известно, эти уравнения являются достаточно сложными для исследования. В настоящей работе мы будем использовать уравнения Дьяченко, полученные в работе [4].

Рассмотрим интегродифференциальные уравнения относительно аналитических в нижней полуплоскости  $\{w = u + iv : v < 0\}$  функций  $R(w, t)$  и  $V(w, t)$ :

$$\begin{aligned} R_t &= i(P(V\bar{R} + \bar{V}R)R_w - (P(V\bar{R} + \bar{V}R))_w R), \\ V_t &= i((P(V\bar{R} + \bar{V}R))V_w - (P(V\bar{V}))_w R) + g(R - 1), \end{aligned} \tag{1}$$

где  $P = \frac{1}{2}(I + iH)$ ,  $H$  — оператор Гильберта. Функции  $R$  и  $V$  являются  $2\pi$ -периодическими по переменной  $u$  и удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} R(w, t) &\rightarrow 1, & |w| &\rightarrow \infty, & \operatorname{Im} w &\leq 0, \\ V(w, t) &\rightarrow 0, & |w| &\rightarrow \infty, & \operatorname{Im} w &\leq 0. \end{aligned}$$

Существование и единственность аналитических решений задачи (1) численные методы, а также конструктивная оценка времени существования аналитических решений рассматривались в работах: [2], [5], [6], [7], [8].

Опишем проекционную схему для получения приближенных решений. Пусть  $N \geq 1$  — фиксированное число размерности приближенной задачи. Приближенные решения будем искать в виде

$$R^N(u, t) = 1 + \sum_{k=1}^N r_k(t)e^{-iku}, \quad V^N(u, t) = \sum_{k=1}^N v_k(t)e^{-iku}. \quad (2)$$

Введем бинарную операцию «\*», которая является замкнутой для множества функций вида (2). Пусть  $A = \sum_{k=-N}^N a_k e^{-iku}$ ,  $B = \sum_{k=-N}^N b_k e^{-iku}$ . Тогда для

$C = AB$  имеем  $C = \sum_{k=-2N}^{2N} c_k e^{-iku}$ . Операцию «\*» введем следующим образом

$A * B = \sum_{k=-N}^N c_k e^{-iku}$ . Приближенные решения  $R^N$  и  $V^N$  будем искать как решения системы уравнений

$$\begin{aligned} R_t^N &= i(U^N * R_u^N - U_u^N * R^N), \\ V_t^N &= i(U^N * V_u^N - B_u^N * R^N) + g(R^N - 1), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $U^N = P(V^N * \bar{R}^N + \bar{V}^N * R^N)$ ,  $B = P(V^N * \bar{V}^N)$ .

Опишем схему нашего вычислительного эксперимента.

1. Выбираем временной интервал, на котором будем исследовать наши решения — фиксируем положительное число  $T$ .
2. Выбираем параметр дискретизации — фиксируем число  $N > 1$
3. Фиксируем положительное число  $\beta$ .
4. Выбираем число  $\alpha$  такое, что  $0 < \alpha < \beta$ .
5. Строим случайные начальные данные следующим образом:

$$R_0(u) = 1 + \sum_{k=1}^N (\xi_k^r e^{-\alpha k}) e^{-iuk}, \quad (4)$$

$$V_0(u) = \sum_{k=1}^N (\xi_k^v e^{-\alpha k} i) e^{-iuk},$$

где  $\xi_k^r$ ,  $\xi_k^v$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  суть независимые случайные величины, равномерно распределенные на  $[-1, 1]$ .

6. Находим численные решения задачи (1) с начальными условиями, выбранными на предыдущем шаге.
7. Нахождение численного решения прекращаем в при выполнении одного из двух условий: 1)  $t = T$ , 2) на текущем шаге по времени нарушено одно из условий:

$$\begin{aligned} |r_k^N(t)| &\leq e^{-\beta k}, \\ |v_k^N(t)| &\leq e^{-\beta k}, \end{aligned} \tag{5}$$

для всех  $k = 1, \dots, N$  и  $t < T$ .

8. В первом случае считаем, что эксперимент закончился «неудачей», а во втором случае будем считать, что эксперимент закончился «успешно».

Считая, параметры  $T$ ,  $N$ ,  $\beta$  фиксированными, мы имеем случайное событие  $\kappa(\alpha)$ , зависящее от параметра  $\alpha$ . Это случайное событие может принимать два взаимно исключающих значения: «успех» и «неудача». Припишем значению «успех» числовое значение 1, а значению «неудача» — числовое значение 0. Таким образом будем рассматривать случайную величину  $\kappa(\alpha)$ . Эта случайная величина имеет биномиальное распределение. С вероятностью  $p_\alpha$  принимает значение 1 и с вероятностью  $q_\alpha = 1 - p_\alpha$  принимает значение 0. Поскольку наша случайная величина зависит от параметра, то можно говорить о случайной функции, заданной на множестве  $\Omega \subset (0, \beta)$ .

Разумеется, мы не знаем истинного распределения вероятностей случайной величины  $\kappa(\alpha)$ , поэтому мы будем получать статистические оценки для вероятностей  $p_\alpha$  и  $q_\alpha$ , проводя серии вычислительных экспериментов. Как известно наиболее употребительной оценкой вероятности события является его частота появления. Эта оценка является состоятельной несмещенной оценкой с минимальной дисперсией. В дополнение к полученной оценке вероятности «успеха» (выхода численного решения из исследуемой области, т.е. нарушения неравенств (5)) мы будем вычислять доверительный интервал для нашей оценки.

Опишем параметры наших вычислительных экспериментов.

Исследуемый временной интервал	[0, 10]
Параметр дискретизации	1024
Шаг по времени	0.001
Параметр $\beta$	0.040475
Количество серий вычислений	1000

Параметр  $\beta$  выбран из условия

$$\beta = -\frac{\ln 10^{-9}}{(N/2)}.$$

Переменный параметр  $\alpha$  мы будем выбирать из множества  $\Omega = \{0.55; 0.65; 0.75; 0.85; 0.95; 1.05; 1.15; 1.25; 1.35; 1.45; 1.55\}$ . Для каждого значения параметра  $\alpha$  мы проведем серию из 1000 испытаний. На основе этой выборке

мы оценим вероятность того, что на отрезке  $[0, 10]$  решение из класса (4) нарушит условие (5).

На рисунке 1 приведена зависимость вероятности  $p_\alpha$  от значения параметра  $\alpha$ . Как и следовало ожидать, с увеличением параметра  $\alpha$  вероятность «успехов», т.е. нарушения условий (5), уменьшается.

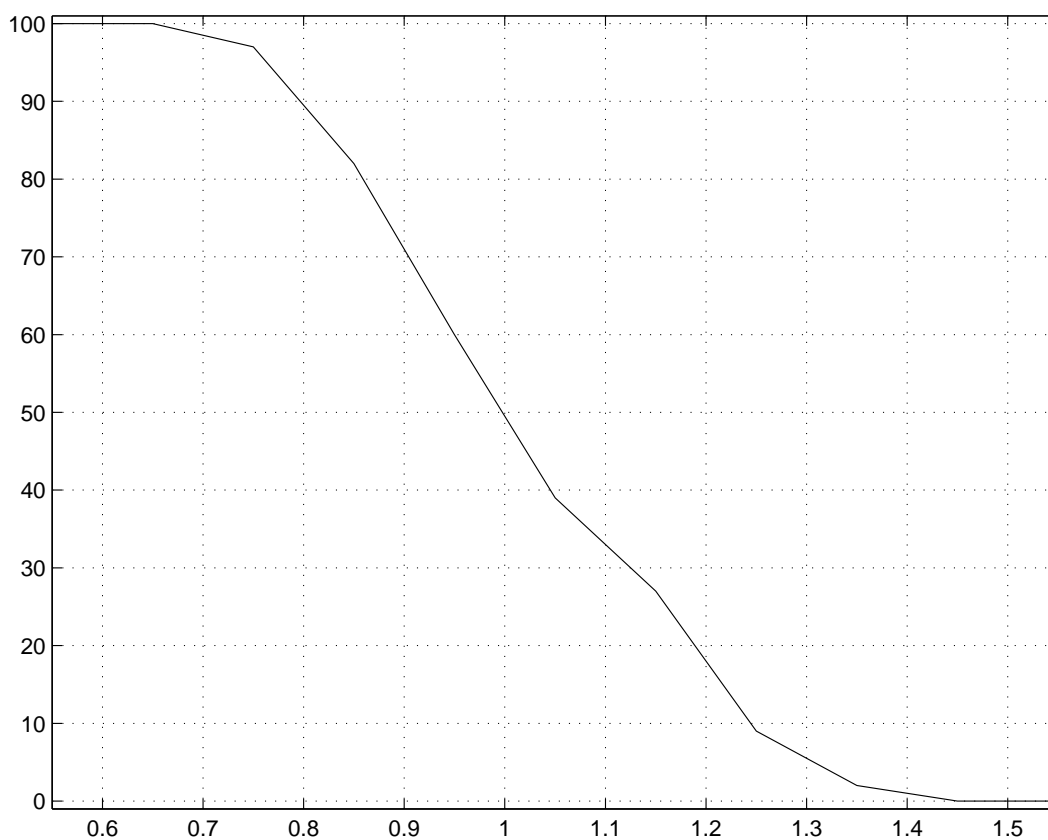


Рис. 1:

## Литература

- [1] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. — Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003, 416 с.
- [2] Шамин Р.В. Вычислительные эксперименты в моделировании поверхностных волн в океане. — М.: Наука, 2008.
- [3] Craig W., Sulem C. Numerical simulation of gravity waves // J. Comput. Phys. — 1993. — 108. — p. 73–83.
- [4] Zakharov V. E., Dyachenko A. I., Vasilyev O. A. New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface // European Journal of Mechanics B/Fluids 21, 2002, p. 283–291.
- [5] Шамин Р. В. К вопросу об оценке времени существования решений системы Коши-Ковалевской с примерами в гидродинамике со свободной поверхностью // Современная математика. Фундаментальные направления — 2007. — 21, — С. 133–148.
- [6] Шамин Р. В. Об одном численном методе в задаче о движении идеальной жидкости со свободной поверхностью // Сиб. журн. выч. мат. — 2006. — 9, № 4. — С. 325–340.
- [7] Шамин Р. В. О существовании гладких решений уравнений Дьяченко, описывающих неустановившиеся течения идеальной жидкости со свободной поверхностью // Докл. АН. — 2006. — 406, № 5. — С. 112-113.
- [8] Шамин Р. В. Об оценке времени существования решений уравнения, описывающего поверхностные волны // Докл. АН. — 2008. — 418, № 5. — С. 112-113.