

Шамин Р.В., Геогджаев В.В.

Статистическое исследование существования решений, описывающих поверхностные волны

Проблемам моделирования поверхностных волн идеальной жидкости посвящено много работ (например, [1], [2], [3]). Математические проблемы, возникающие при исследовании динамики идеальной жидкости со свободной поверхностью, являются достаточно сложными как для теоретического исследования, так и для проведения вычислительных экспериментов. В настоящей работе рассматривается применение статистических методов для исследования вопросов существования решений на конечном временном интервале со случайными начальными данными.

Пусть идеальная несжимаемая жидкость занимает область в плоскости (x, y) , ограниченную свободной поверхностью

$$\begin{aligned} -\infty < y \leq \eta(x, t), \\ -\infty < x < \infty, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Считая движение жидкости потенциальным, мы имеем

$$v(x, y, t) = \nabla\Phi(x, y, t),$$

где $v(x, y, t)$ — двумерное поле скоростей, $\Phi(x, y, t)$ — потенциал скоростей. Из условия несжимаемости жидкости $\operatorname{div} v = 0$ следует, что потенциал скоростей удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\Phi(x, y, t) = 0.$$

С уравнением $\Delta\Phi = 0$ связываются следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} (\eta_t + \Phi_x \eta_x - \Phi_y)|_{y=\eta(x,t)} &= 0, \\ (\Phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + gy)|_{y=\eta(x,t)} &= 0, \\ \Phi_y|_{y=-\infty} &= 0, \end{aligned}$$

здесь g — ускорение поля тяжести.

Как известно, эти уравнения являются достаточно сложными для исследования. В настоящей работе мы будем использовать уравнения Дьяченко, полученные в работе [4].

Рассмотрим интегродифференциальные уравнения относительно аналитических в нижней полуплоскости $\{w = u + iv : v < 0\}$ функций $R(w, t)$ и $V(w, t)$:

$$\begin{aligned} R_t &= i(P(V\bar{R} + \bar{V}R)R_w - (P(V\bar{R} + \bar{V}R))_w R), \\ V_t &= i((P(V\bar{R} + \bar{V}R))V_w - (P(V\bar{V}))_w R) + g(R - 1), \end{aligned} \tag{1}$$

где $P = \frac{1}{2}(I + iH)$, H — оператор Гильберта. Функции R и V являются 2π -периодическими по переменной u и удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} R(w, t) &\rightarrow 1, & |w| &\rightarrow \infty, & \operatorname{Im} w &\leq 0, \\ V(w, t) &\rightarrow 0, & |w| &\rightarrow \infty, & \operatorname{Im} w &\leq 0. \end{aligned}$$

Существование и единственность аналитических решений задачи (1) численные методы, а также конструктивная оценка времени существования аналитических решений рассматривались в работах: [2], [5], [6], [7], [8].

Опишем проекционную схему для получения приближенных решений. Пусть $N \geq 1$ — фиксированное число размерности приближенной задачи. Приближенные решения будем искать в виде

$$R^N(u, t) = 1 + \sum_{k=1}^N r_k(t)e^{-iku}, \quad V^N(u, t) = \sum_{k=1}^N v_k(t)e^{-iku}. \quad (2)$$

Введем бинарную операцию «*», которая является замкнутой для множества функций вида (2). Пусть $A = \sum_{k=-N}^N a_k e^{-iku}$, $B = \sum_{k=-N}^N b_k e^{-iku}$. Тогда для

$C = AB$ имеем $C = \sum_{k=-2N}^{2N} c_k e^{-iku}$. Операцию «*» введем следующим образом

$A * B = \sum_{k=-N}^N c_k e^{-iku}$. Приближенные решения R^N и V^N будем искать как решения системы уравнений

$$\begin{aligned} R_t^N &= i(U^N * R_u^N - U_u^N * R^N), \\ V_t^N &= i(U^N * V_u^N - B_u^N * R^N) + g(R^N - 1), \end{aligned} \quad (3)$$

где $U^N = P(V^N * \bar{R}^N + \bar{V}^N * R^N)$, $B = P(V^N * \bar{V}^N)$.

Опишем схему нашего вычислительного эксперимента.

1. Выбираем временной интервал, на котором будем исследовать наши решения — фиксируем положительное число T .
2. Выбираем параметр дискретизации — фиксируем число $N > 1$
3. Фиксируем положительное число β .
4. Выбираем число α такое, что $0 < \alpha < \beta$.
5. Строим случайные начальные данные следующим образом:

$$R_0(u) = 1 + \sum_{k=1}^N (\xi_k^r e^{-\alpha k}) e^{-iuk}, \quad (4)$$

$$V_0(u) = \sum_{k=1}^N (\xi_k^v e^{-\alpha k} i) e^{-iuk},$$

где ξ_k^r , ξ_k^v , $k = 1, 2, \dots, N$ суть независимые случайные величины, равномерно распределенные на $[-1, 1]$.

6. Находим численные решения задачи (1) с начальными условиями, выбранными на предыдущем шаге.
7. Нахождение численного решения прекращаем в при выполнении одного из двух условий: 1) $t = T$, 2) на текущем шаге по времени нарушено одно из условий:

$$\begin{aligned} |r_k^N(t)| &\leq e^{-\beta k}, \\ |v_k^N(t)| &\leq e^{-\beta k}, \end{aligned} \tag{5}$$

для всех $k = 1, \dots, N$ и $t < T$.

8. В первом случае считаем, что эксперимент закончился «неудачей», а во втором случае будем считать, что эксперимент закончился «успешно».

Считая, параметры T , N , β фиксированными, мы имеем случайное событие $\kappa(\alpha)$, зависящее от параметра α . Это случайное событие может принимать два взаимно исключающих значения: «успех» и «неудача». Припишем значению «успех» числовое значение 1, а значению «неудача» — числовое значение 0. Таким образом будем рассматривать случайную величину $\kappa(\alpha)$. Эта случайная величина имеет биномиальное распределение. С вероятностью p_α принимает значение 1 и с вероятностью $q_\alpha = 1 - p_\alpha$ принимает значение 0. Поскольку наша случайная величина зависит от параметра, то можно говорить о случайной функции, заданной на множестве $\Omega \subset (0, \beta)$.

Разумеется, мы не знаем истинного распределения вероятностей случайной величины $\kappa(\alpha)$, поэтому мы будем получать статистические оценки для вероятностей p_α и q_α , проводя серии вычислительных экспериментов. Как известно наиболее употребительной оценкой вероятности события является его частота появления. Эта оценка является состоятельной несмещенной оценкой с минимальной дисперсией. В дополнение к полученной оценке вероятности «успеха» (выхода численного решения из исследуемой области, т.е. нарушения неравенств (5)) мы будем вычислять доверительный интервал для нашей оценки.

Опишем параметры наших вычислительных экспериментов.

Исследуемый временной интервал	[0, 10]
Параметр дискретизации	1024
Шаг по времени	0.001
Параметр β	0.040475
Количество серий вычислений	1000

Параметр β выбран из условия

$$\beta = -\frac{\ln 10^{-9}}{(N/2)}.$$

Переменный параметр α мы будем выбирать из множества $\Omega = \{0.55; 0.65; 0.75; 0.85; 0.95; 1.05; 1.15; 1.25; 1.35; 1.45; 1.55\}$. Для каждого значения параметра α мы проведем серию из 1000 испытаний. На основе этой выборке

мы оценим вероятность того, что на отрезке $[0, 10]$ решение из класса (4) нарушит условие (5).

На рисунке 1 приведена зависимость вероятности p_α от значения параметра α . Как и следовало ожидать, с увеличением параметра α вероятность «успехов», т.е. нарушения условий (5), уменьшается.

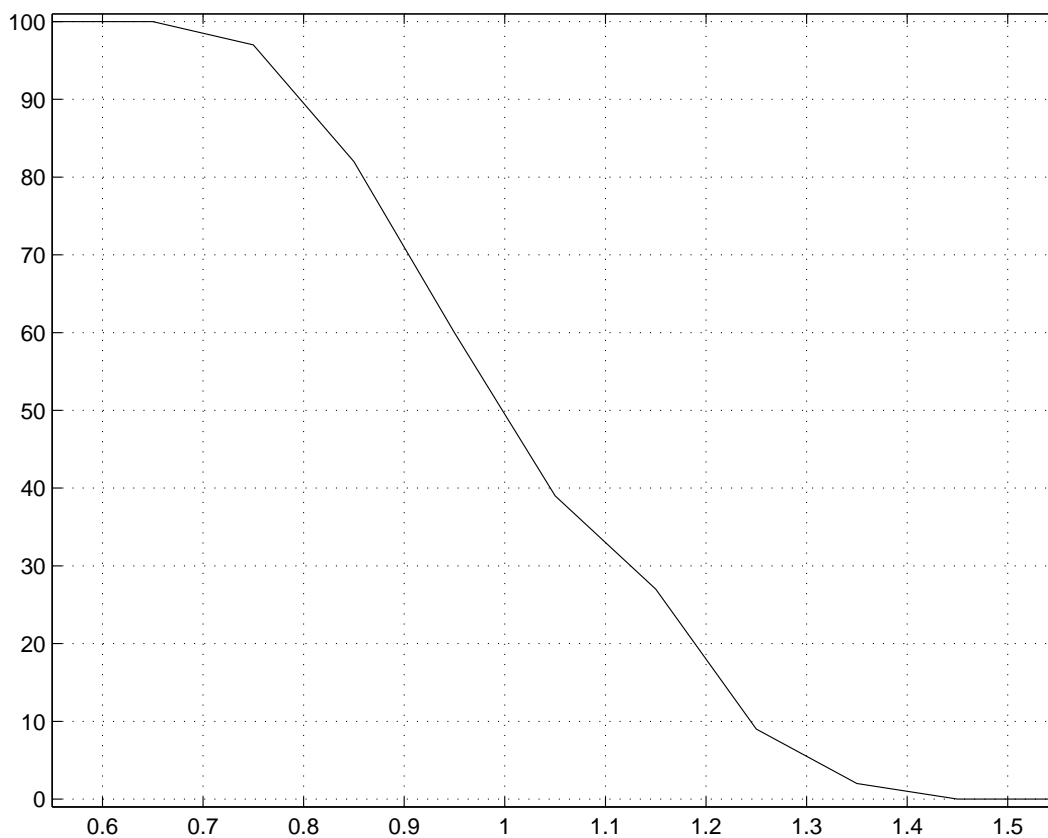


Рис. 1:

Литература

- [1] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. — Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003, 416 с.
- [2] Шамин Р.В. Вычислительные эксперименты в моделировании поверхностных волн в океане. — М.: Наука, 2008.
- [3] Craig W., Sulem C. Numerical simulation of gravity waves // J. Comput. Phys. — 1993. — 108. — p. 73–83.
- [4] Zakharov V. E., Dyachenko A. I., Vasilyev O. A. New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface // European Journal of Mechanics B/Fluids 21, 2002, p. 283–291.
- [5] Шамин Р. В. К вопросу об оценке времени существования решений системы Коши-Ковалевской с примерами в гидродинамике со свободной поверхностью // Современная математика. Фундаментальные направления — 2007. — 21, — С. 133–148.
- [6] Шамин Р. В. Об одном численном методе в задаче о движении идеальной жидкости со свободной поверхностью // Сиб. журн. выч. мат. — 2006. — 9, № 4. — С. 325–340.
- [7] Шамин Р. В. О существовании гладких решений уравнений Дьяченко, описывающих неустановившиеся течения идеальной жидкости со свободной поверхностью // Докл. АН. — 2006. — 406, № 5. — С. 112-113.
- [8] Шамин Р. В. Об оценке времени существования решений уравнения, описывающего поверхностные волны // Докл. АН. — 2008. — 418, № 5. — С. 112-113.