Вычислительные технологии. Том 13. Специальный выпуск 2, 2008. С. 87–93.

Моделирование поверхностных волн: статистический метод анализа разрешимости *

Р.В. Шамин
Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН
e-mail: roman@shamin.ru

В статье рассматривается применение статистических методов для исследования разрешимости нелинейных уравнений. Абстрактные результаты применяются к уравнениям, описывающим поверхностные волны идеальной жидкости.

Для подтверждения методов, изложенных в статье, приведены результаты вычислительных экспериментов.

1. Введение

Задачи математической гидродинамики со свободной поверхностью относятся к наиболее трудным проблемам современной математики. Принципиальной проблемой является разрешимость уравнений, описывающих поверхностные волны идеальной жидкости. Важным инструментом при исследовании разрешимости этих уравнений является проведение вычислительных экспериментов. В настоящей работе рассматривается применение методов математической статистики для исследования разрешимости нелинейных задач. Полученные результаты позволяют получать вероятностное подтверждение результатов численных опытов. Знание такой оценки вероятности имеет принципиальное значение в условиях автоматизации проведения вычислительных опытов.

В разделе 2 мы рассматриваем постановку задачи, описывающую нелинейную динамику поверхностных волн идеальной жидкости.

В разделе 3 мы рассматриваем абстрактные нелинейные операторные уравнения, для которых мы строим схему применения статистических методов для исследования разрешимости. Опишем основную нашу идею. Пусть мы имеем оператор $A : X \to Y$, где X и Y — банаховы пространства, и пусть для $f \in Y$ мы имеем последовательность приближенных решений $x_n \in X$ уравнения $Ax = f$. Во многих задачах можно доказать, что если последовательность приближенных решений принадлежит компактному в X множеству M, то существует единственное решение операторного уравнения $Ax = f$, и последовательность x_n сходится к этому решению. Для этого случая в статье рассматривается схема проведения вычислительных экспериментов, позволяющая строить эмпирическую функцию распределения вероятностей существования решения в случае, если $x_n \in M$, $n = 1, \ldots, N$. При численном моделировании такая оценка вероятности оказывается очень важной в приложениях, поскольку позволяет конструктивно оценивать вероятность существования решений в тех случаях, когда невозможно установить разрешимость уравнения.

*Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 07-05-00648-а, № 07-05-92211-НЦНИЛ-а и INTAS Ref. Nr 05-1000008-8014

В разделе 4 мы применяем абстрактные результаты к вычислительным экспериментам в гидродинамике идеальной жидкости со свободной поверхностью. Для демонстрации наших методов мы приводим результаты реальных вычислительных экспериментов, проводившихся в лаборатории нелинейных волновых процессов Института океанологии им. П.П. Ширшова РАН и лаборатории экспериментальной математики кафедры дифференциальных уравнений и математической физики Российского университета дружбы народов. В частности, результаты настоящей работы применялись в численных экспериментах при исследовании такого интересного океанологического явления, как «волна-убийца».

2. Поверхностные волны идеальной жидкости

Будем рассматривать течение идеальной несжимаемой жидкости, которая занимает область в плоскости (x, y), ограниченную свободной поверхностью

$$-\infty < y < \eta(x,t),$$
$$-\infty < x < \infty, \quad t > 0.$$

Считая движение жидкости потенциальным, мы имеем

$$v(x,y,t) = \nabla\Phi(x,y,t),$$

где $v(x,y,t)$ — двумерное поле скоростей, $\Phi(x,y,t)$ — потенциал. Из условия несжимаемости жидкости $\mathrm{div} v = 0$ следует, что потенциал скоростей удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\Phi(x,y,t) = 0.$$

С этим уравнением связываются следующие граничные и начальные условия:

$$(\eta_t + \Phi_x\eta_x - \Phi_y)|_{y=\eta(x,t)} = 0,$$

$$(\Phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + gy)|_{y=\eta(x,t)} = 0,$$

$$\Phi_y|_{y=-\infty} = 0,$$

$$\eta|_{t=0} = \eta_0(x),$$

$$\Phi|_{t=0} = \Phi_0(x,y).$$

Здесь g — ускорение поля тяжести.

Исследованием уравнений, описывающих поверхностные волны идеальной жидкости, посвящено много работ. Первые результаты о существовании аналитических решений в этих задачах получены в работе [1]. Существование решений конечной гладкости доказано в [2], [3]. Трехмерные задачи для поверхностных волн идеальной жидкости рассматривались в работе [4].

Рассмотрим величину $\Psi(x,t) = \Phi(x,\eta(x,t),t)$, которая является значением потенциала на свободной поверхности. В.Е. Захаровым было установлено, что переменные η и Ψ являются канонически сопряженными величинами, т. е.

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\Psi},$$
$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\eta},$$

где гамильтониан H совпадает с полной энергией жидкости $H = T + U$,

$$T = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{-\bar{h}}^{\eta(x,t)} |\nabla\Phi|^2 dy, \quad U = \frac{g}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \eta^2(x,t)dx.$$

Следуя работам [5], [6] совершим конформное отображение области, занимаемой жидкостью в плоскости (x, y) в полупространство в переменных (u, v)

$$-\infty < u < \infty, \quad -\infty < v < 0.$$

После преобразования поверхность $\eta(x,t)$ может быть представлена в параметрическом виде

$$y = y(u,t), \quad x = u + \tilde{x}(u,t),$$

где $\tilde{x}(u,t)$ и $y(u,t)$ связаны оператором Гильберта

$$y = \mathrm{H}[\tilde{x}], \quad \tilde{x} = -\mathrm{H}[y], \mathrm{H}[f](u) = \frac{1}{\pi}\ \mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u')du'}{u' - u}.$$

Рассмотрим комплексные функции $z(w,t) = x(w,t) + iy(w,t)$ и $\Phi(u,t) = \Psi(u,t) + i\mathrm{H}[\Psi(u,t)]$, где $w = u + iv$. Введем новые переменные $R(w,t)$ и $V(w,t)$ по следующим формулам:

$$R(w,t) = \frac{1}{z_w}, \qquad V(w,t) = i\frac{\Phi_w}{z_w}.$$

Функции R и V аналитичны в нижней полуплоскости и удовлетворяют следующим условиям:

$$R(w,t) \to 1, \quad |w| \to \infty, \quad \operatorname{Im} w \le 0,$$

$$V(w,t) \to 0, \quad |w| \to \infty, \quad \operatorname{Im} w \le 0.$$

Как показано в работе [6], функции R и V удовлетворяют следующей системе интегродифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &R_t = i(UR_w - U_wR), \\ &V_t = i(UV_w - B_wR) + g(R - 1), \end{aligned} \tag{1}$$

где $U = \mathrm{P}(V\overline{R} + \overline{V}R)$, $B = \mathrm{P}(V\overline{V})$, $\mathrm{P} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{I} + i\mathrm{H})$ — интегральный оператор. Эти уравнения называются уравнениями Дьяченко.

Уравнения (1) можно трактовать как нелинейное уравнение в гильбертовом пространстве, разрешенное относительно производной по времени. В работах [7], [8], [9] рассматривались вопросы разрешимости уравнений (1), а также методы оценки времени существования аналитических решений.

3. Абстрактный случай

Пусть X, Y — банаховы пространства. Будем рассматривать непрерывный, вообще говоря, нелинейный оператор

$$\mathrm{A} : X \to Y.$$

Для заданного элемента $y \in Y$ рассмотрим уравнение

$$\mathrm{A}\, x = y. \tag{2}$$

Введем множества $M \subset X$ и $Q \subset Y$. Будем предполагать, что $y \in Q$, а решение уравнения (2) $x \in M$.

Предположим, что мы имеем определенный алгоритм, позволяющий находить последовательность x_n, для любого конечного $n = 1, 2, \ldots$. При этом последовательность x_n принадлежит пространству X. Мы будем предполагать выполненным следующее условие.

Условие 1. *Если при заданном $y \in Q$ имеет место вложение $\{x_n\} \subset M$, при всех $n = 1, 2, \ldots$, то решение задачи* (2) *существует, это решение x принадлежит множеству M и имеет место*

$$\|x_n - x\|_X \to 0, \quad n \to \infty.$$

В реальности мы обычно не можем *знать* всю последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$. Как правило мы имеем лишь конечное множество $\{x_n\}$, $n = 1, 2, \ldots, N$. Задача состоит в том, чтобы по конечным *наблюдениям* $\{x_n\}$, $n = 1, 2, \ldots, N$ сделать статистический вывод о принадлежности множеству M всей последовательности $\{x_n\}$, и соответственно сделать вывод о существовании решения задачи (2) для заданной правой части $y \in Q$.

Предположим, что мы нашли первые N членов последовательности x_n, и видим, что $x_n \in M$ при $n = 1, 2, \ldots, N$. С какой вероятностью вся последовательность x_n принадлежит множеству M? Прежде чем искать ответ на это вопрос, мы должны определить вероятностное пространство, относительно которого мы будем вычислять вероятность.

Будем рассматривать случай, когда множество Q является компактом в конечномерном подпространстве $\widetilde{Q} \subset Y$. Тогда можно рассмотреть случайный вектор $y \in Q$. Введем случайную величину $\nu(y)$ следующим образом. Если для случайного y существует решение уравнения (2), то $\nu(y) = +\infty$. В противном случае определим $\nu(y)$ по формуле

$$\nu(y) = \min\{n : x_n \notin M\}.$$

Будем предполагать, что случайный вектор y равномерно распределен в Q, и опишем схему, позволяющую построить эмпирическую функцию распределения для случайной величины $\nu(y)$ по наблюдениям $y \in Q$.

1. Фиксируем множества M и Q, число N, количество итераций I.

2. Выбираем случайный вектор $y \in Q$.

3. Рассчитываем последовательность $\{x_n\}$, $n = 1, \ldots, N$.

4. Если существует номер n' такой, что $x_{n'} \notin M$, то добавляем к выборке S случайную величину $\nu(y)$.

5. Если количество итераций меньше I, то переход к шагу 2.

6. Окончание алгоритма. На выходе мы имеем выборку S объема T.

Эмпирическую функцию распределения зададим следующим образом

$$F(n) = \frac{\#\{\nu \in S : \nu \leq n\}}{T},$$

где # означает мощность множества.

Определение 1. *Будем говорить, что задача* (2) *имеет решение (для фиксированного y) с ν-вероятностью α*

$$\alpha = 1 - F(N'),$$

если $x_n \in M$ для всех $n = 1, 2, \dots, N'$.

Определение 2. *Решение существующее с ν-вероятностью единица будем называть существующим ν почти наверное.*

Заметим, что в этом определении число N' может быть как меньше N, так и больше. Очевидно, что если $N' \geq N$, то ν-вероятность всегда будет равна единицы.

На адекватность наших статистических выводов сказывается объем выборки T при построении функции распределения и число N. Чем больше объем выборки T и число N тем более адекватным будут наши выводы.

4. Применение статистического метода в задачах гидродинамики

Проиллюстрируем наши идеи на примере задачи (1). Систему уравнений (1) можно записать в форме (2). Соответственно, вместо правых частей уравнения (2) элемента y мы будем рассматривать начальные функции R_0, V_0.

Приведем численную схему для получения приближенных решений. Пусть $N \geq 1$ — фиксированное число размерности приближенной задачи. Приближенные решения будем искать в виде

$$R^N(u,t) = 1 + \sum_{k=1}^{N} r_k^N(t) e^{-iku}, \quad V^N(u,t) = \sum_{k=1}^{N} v_k^N(t) e^{-iku}. \tag{3}$$

Поскольку операция умножения функций не является замкнутой в классе функций (3), введем бинарную операцию «$*$», которая является замкнутой для множества функций вида (3). Пусть $A = \sum\limits_{k=-N}^{N} a_k e^{-iku}$, $B = \sum\limits_{k=-N}^{N} b_k e^{-iku}$. Тогда для $C = AB$ имеем $C = \sum\limits_{k=-2N}^{2N} c_k e^{-iku}$. Операцию «$*$» введем следующим образом $A * B = \sum\limits_{k=-N}^{N} c_k e^{-iku}$, где c_k — коэффициенты Фурье функции C.

Приближенные решения R^N и V^N будем искать как решения системы уравнений

$$\begin{gathered} R_t^N = i(U^N * R_u^N - U_u^N * R^N), \\ V_t^N = i(U^N * V_u^N - B_u^N * R^N) + g(R^N - 1), \end{gathered} \tag{4}$$

где
$$U^N = \mathrm{P}(V^N * \overline{R}^N + \overline{V}^N * R^N), \quad B = \mathrm{P}(V^N * \overline{V}^N).$$

Множество Q определим следующим образом:
$$|r_k^N(0)| \leq e^{-\beta k},$$
$$|v_k^N(0)| \leq e^{-\beta k},$$

для всех $k = 1, \ldots, 1024$ и $t < 10.0$, где $\beta = -\frac{\ln 10^{-9}}{(1024/2)} \approx 0.040475$. Соответственно, множества M будем определять через числовой параметр $\alpha > 0$ следующим образом
$$|r_k^N(t)| \leq e^{-\alpha k},$$
$$|v_k^N(t)| \leq e^{-\alpha k},$$

для всех $k = 1, \ldots, 1024$ и $t < 10.0$.

В нашем эксперименте число T будет выбрано в зависимости от различных экспериментов при разных α. Приближения x_n мы будем выбирать из условия $N = 64 \cdot 2^n, \quad n = 1, 2, 3, 4$.

Приведем результаты вычислительных экспериментов, проводившихся в лаборатории нелинейных волновых процессов Института океанологии им. П.П. Ширшова РАН и в лаборатории экспериментальной математике на кафедре дифференциальных уравнений и математической физики Российского университета дружбы народов.

Номер эксперимента	Параметр α	число T
1	0.7	990
2	0.8	925
3	0.9	583
4	1.0	583
5	1.1	405

На рисунке 1 приведем функцию распределения F для эксперимента № 1.

В случае, когда максимальный номер приближения x_n совпадает с числом N, то мы всегда будем получать результат, что решение существует ν почти наверное. В этом случае мы можем оценить вероятность существования решения с использованием статистических критериев проверки гипотез. Приведем таблицу в которой приведем вероятности существования решений с уровнем значимости 0.95 таких, что
$$x_n \in M, \quad n = 1, 2, 3, 4.$$

Номер эксперимента	Вероятность существования решения
1	0.9961
2	0.9959
3	0.9951
4	0.9935
5	0.9906

Из этой таблицы видно, что если мы наблюдаем, что наше *численное решение* удовлетворяет условиям $x_n \in M$, $n = 1, 2, 3, 4$, то с достаточно большой вероятностью можно утверждать, что *истинное решение* существует для выбранных начальных данных.

Автор выражает глубокую благодарность академику РАН В.Е. Захарову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

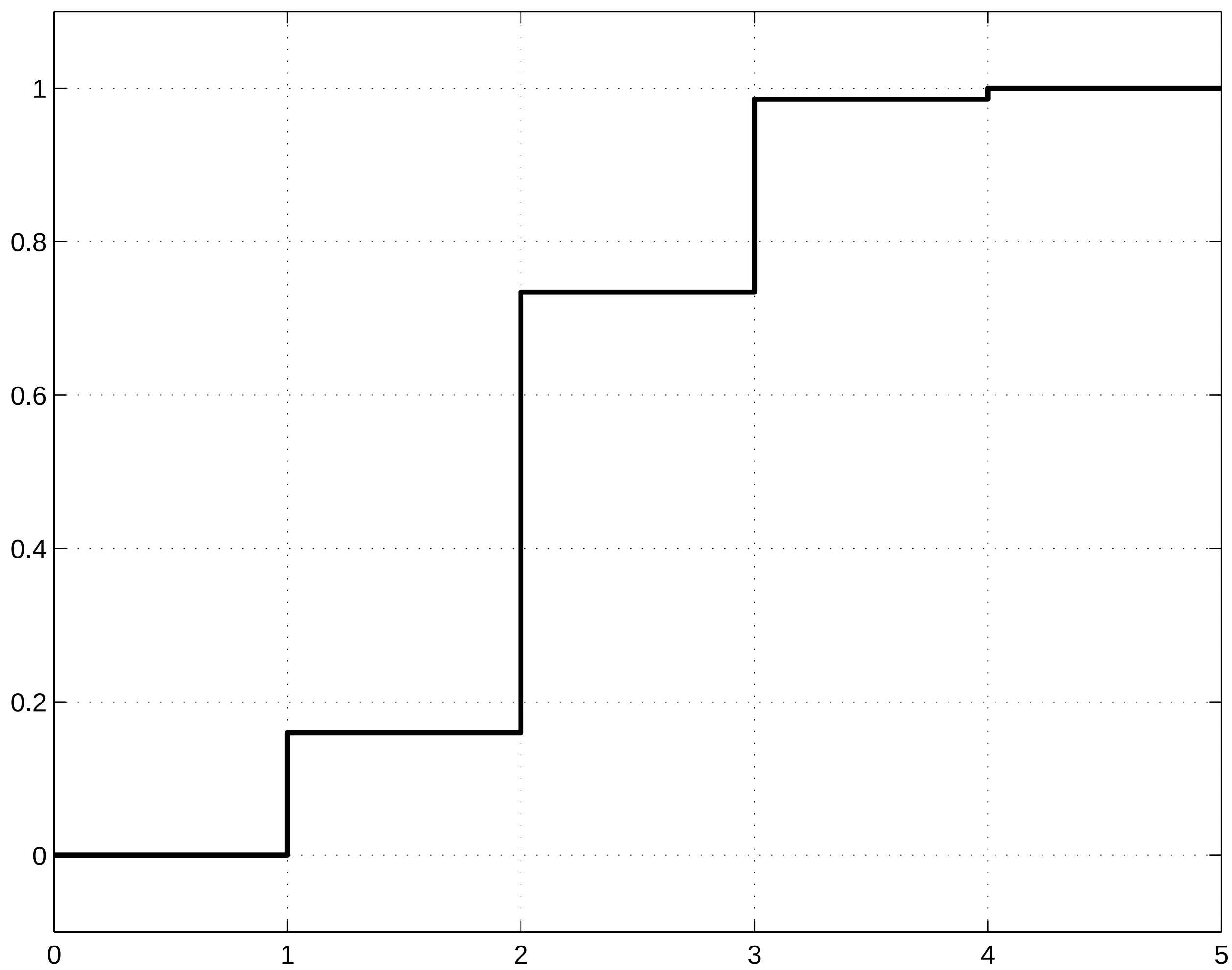

Рис. 1. Функция распределения

Список литературы

[1] Налимов В.И. Априорные оценкирешений эллиптических уравнений в классе аналитических функций и их приложения к задаче Коши-Пуассона // Докл. АН СССР, 1969, т. 189, N 1, с. 45-49.

[2] Налимов В.И. Нестационарные вихревые волны // Сибирский математический журнал, 1996, т. 37, N 6, с. 1356–1366.

[3] Налимов В.И. Задача Коши-Пуассона // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1974, вып. 18, с. 104–210.

[4] Wu S. Well-posedness in Sobolev spaces of the full water wave problem in 3-D// J. Amer. Math. Soc. — 1999. — v. 12, № 2. — p. 445–495.

[5] Дьяченко А. И., Захаров В. Е., Кузнецов Е. А. Нелинейная динамика свободной поверхности идеальной жидкости // Физика плазмы, 1999, т. 22, N 10, с. 916–928.

[6] Zakharov V. E., Dyachenko A. I., Vasilyev O. A. New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface // European Journal of Mechanics B/Fluids 21, 2002, p. 283–291.

[7] Шамин Р.В. О существовании гладких решений уравнений Дьяченко, описывающих неустановившиеся течения идеальной жидкости со свободной поверхностью // Доклады Российской академии наук, 2006, т. 406, N 5, с. 112–113.

[8] Шамин Р.В. Об одном численном методе в задаче о движении идеальной жидкости со свободной поверхностью // Сиб. журн. выч. мат. — 2006. — т. 9, №4. — С. 325–340.

[9] Шамин Р.В. К вопросу об оценке времени существования решений системы Коши-Ковалевской с примерами в гидродинамике со свободной поверхностью // Современная математика. Фундаментальные направления. Том 21 (2007), с. 133—148.

Ключевые слова: *гидродинамика со свободной поверхностью, численное моделирование, регуляризация*
Key words: *hydrodynamics with free surface, numeric simulations, regularization*