

Регуляризация метода прямых в условиях машинной точности с примерами в гидродинамике со свободной поверхностью *

Р.В. ШАМИН

Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН

e-mail: roman@shamin.ru

В статье рассматриваются вопросы реализации метода прямых для численного решения эволюционных уравнений в условиях машинной точности. Приводится эффективный алгоритм метода прямых, позволяющий проводить численные расчеты в условиях, когда при стандартном методе прямых возникает вычислительная неустойчивость. Показано, что предлагаемая процедура является одним из вариантов регуляризации некорректных задач по методу квазирешений. Приведены примеры успешного применения, предлагаемого подхода в важных задачах гидродинамики: нестационарное течение идеальной жидкости со свободной поверхностью и неустойчивое течение Релея-Тейлора идеальной жидкости.

1. Введение

Погрешности округлений при вычислениях являются принципиальной проблемой вычислительной математики. Одним из возможных способов преодоления трудностей проведения вычислений в условиях машинной точности является применение методов интервального анализа см., например, [1], [2], [3]. Однако использование интервального исчисления требует специального программирования численных методов, снижает скорость вычислений и требует увеличения объема оперативной памяти. В настоящей работе предложен один простой и эффективный способ «борьбы» с особенностями машинной точности. Этот способ (см. 3) является одним из вариантов спектрального фильтра. В тоже время предлагаемый метод можно трактовать, как регуляризацию некорректных задач по методу квазирешений. По сравнению с другими спектральными фильтрами этот метод является более эффективным в рассматриваемых задачах. Разумеется, предложенный подход может быть эффективным лишь некоторых вычислительных задачах. В настоящей работе рассматривается применение численных методов для получения приближенных решений систем уравнений, описывающих нестационарное течение идеальной жидкости со свободной поверхностью, где с помощью нашего подхода удалось получить важные результаты в задачах океанологии и математической гидродинамики.

При описании нелинейной динамики поверхности идеальной жидкости мы используем уравнения, полученные в работах [4], [5]. Эти уравнения являются эквивалентными

*Работа выполнена при финансовой поддержке грантов НШ-7550.2006.2. и INTAS Ref. Nr 05-1000008-8014

системе уравнений Эйлера со свободной поверхностью. Уравнения, исследуемые в разделе 4, представляют собой системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, разрешенных относительно производных по времени. Мы используем методы прямых для сведения уравнений в частных производных к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Полученная после дискретизации по пространственным переменным система обыкновенных уравнений решается стандартным методом Рунге-Кутты 4-го порядка. При вычислении правых частей этих уравнений мы используем методы быстрого преобразования Фурье, при реализации которых возникают основные погрешности вычислений. В рассматриваемых примерах мы сталкиваемся вычислительной неустойчивостью, возникающей вследствие погрешностей округления. В разделе 3 мы рассматриваем модификацию метода прямых, позволяющую в ряде случаев избежать вычислительной неустойчивости.

Мы рассматриваем следующие задачи гидродинамики со свободной поверхностью: течение идеальной жидкости со свободной поверхностью с конечной глубиной и начальную стадию неустойчивости Релея-Тейлора, где рассматривается граница между тяжелой идеальной жидкостью и вакуумом в условии, когда жидкость находится над вакуумом. В начальный момент свободной поверхности придается возмущение и исследуется развитие Релей-Тейлоровской неустойчивости. Эта модель является классическим примером неустойчивости см., например, [6], [7].

Необходимо отметить, что предлагаемый метод не в полной мере подавляет численную неустойчивость в задачах гидродинамики со свободной поверхностью, а лишь «продлевает жизнь» численной схеме. Описываемые подходы с успехом применялись в исследованиях в Институте океанологии им. П.П. Ширшова РАН и в Институте теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН.

2. Постановка проблемы

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Рассмотрим в H , вообще говоря, нелинейный оператор A , определенный на подпространстве $\mathcal{D} \subset H$. Предположим, что в H можно выбрать ортонормированный в H базис $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{D}$.

Через $C^k([0, T]; H)$, $0 < T < \infty$ обозначим пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций на $[0, T]$ со значениями в H с нормой

$$\|u\|_{C^k([0, T]; H)} = \max_{t \in [0, T]} (\|u(t)\|_H + \|u^{(k)}(t)\|_H).$$

Будем рассматривать абстрактную задачу Коши

$$\begin{aligned} u'(t) &= A[u(t)], \quad t \in [0, T] \\ u(0) &= \psi, \quad \psi \in H. \end{aligned} \tag{1}$$

Определение 1. Функция $u \in C^1([0, T]; H)$ такая, что $u(t) \in \mathcal{D}$ при $t \in [0, T]$ и удовлетворяющая (1) называется решением задачи (1).

Рассмотрим проекционный метод сведения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для задачи (1). Для конечного N введем проектор $P_N : H \rightarrow H$ по формуле

$$P_N \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k \right) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k.$$

При фиксированном N будем рассматривать функцию $u^N(t) = \sum_{k=1}^N \alpha_k^N(t) \varphi_k$, где $\alpha_k^N \in C^1[0, T]$, являются решением задачи Коши

$$\begin{aligned} (u^N)'(t) &= P_N(A[u(t)]), \quad t \in [0, T] \\ u^N(0) &= P_N\psi. \end{aligned} \tag{2}$$

Функция u^N полностью определяется вектор-функцией $\alpha^N(t) = (\alpha_1^N(t), \dots, \alpha_N^N(t))^T$. Перепишем задачу (2) в виде системы N -го порядка обыкновенных дифференциальных уравнений относительно α^N . Обозначим $F(\alpha^N) = (F_1(\alpha^N), \dots, F_N(\alpha^N))^T$, где $F_k(\alpha^N(t)) = (A[\sum_{i=1}^N \alpha_i^N(t) \varphi_i], \varphi_k)_H$. Будем рассматривать следующую систему уравнений, эквивалентную (2)

$$\begin{aligned} (\alpha^N)'(t) &= F(\alpha^N(t)), \quad t \in [0, T] \\ \alpha^N(0) &= \psi^N, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\psi^N = (\psi_1, \dots, \psi_N)^T$, $\psi_k = (\psi, \varphi_k)_H$.

Правую часть в уравнении (3) можно трактовать как функцию $F: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$.

Приведем схему Рунге-Кутты 4-го порядка для системы (3). Через τ обозначим шаг по переменной t . Соответственно, $t_m = m\tau$, $m = 0, \dots, M$. Будем предполагать, что на рассматриваемом интервале существует единственное решение задачи (3). Численные решения будем получать по следующей формуле

$$\begin{aligned} \alpha^N(t_m) &= \alpha^N(t_{m-1}) + \frac{\tau}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ k_1 &= F(\alpha^N(t_{m-1})), \\ k_2 &= F(\alpha^N(t_{m-1}) + \frac{\tau}{2}k_1), \\ k_3 &= F(\alpha^N(t_{m-1}) + \frac{\tau}{2}k_2), \\ k_4 &= F(\alpha^N(t_{m-1}) + \tau k_3), \\ m &= 1, \dots, M. \end{aligned} \tag{4}$$

В реальности при вычислениях на ЭВМ по схеме (4), как правило, возникают ошибки в силу ограниченной машинной точности. Основным источником ошибок — вычисление функции F . Элементы вектора α^N трактуются как коэффициенты ряда Фурье, поэтому погрешности в вычислении этой функции могут повлечь катастрофические последствия для проведения расчетов. Типичной является ситуация, когда по модулю эти коэффициенты быстро стремятся к нулю. При этом приходится проводить вычисления с числами по модулю значительно меньшими гарантированных значащих цифр. Вычисляя по схеме (4), мы наблюдаем значения $\tilde{\alpha}^N$, которые связаны с точными значениями следующим соотношением

$$|\alpha^N(t_m) - \tilde{\alpha}^N(t_m)| = \delta_m^N, \quad m = 1, \dots, M.$$

Конкретные значения $\tilde{\alpha}^N(t_m)$ зависят от реализации счета по схеме (4). Мы будем говорить, что последовательность $\alpha^N(t_m)$ является вычислительно неустойчивой, если числовая последовательность δ_m^N не стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. В этом случае, относительная погрешность вычисления α^N быстро стремится к бесконечности при $N \rightarrow \infty$.

3. Регуляризация в случае вычислительной неустойчивости

В ситуации вычислительной неустойчивости мы не можем произвольно увеличивать число N , а должны согласовывать его с уровнем ошибок вычислений. Это стандартная ситуация в теории некорректных задач. Выбор размерности аппроксимирующей системы (числа N) оптимальным образом представляет собой трудную задачу. Предложим простой алгоритм, который позволит нам обеспечивать выбор N близким к оптимальному.

Пусть выбрано число $q > 0$. Введем функцию $R_q : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ по формуле

$$R_q(x_1, x_2, \dots, x_N) = (r_q(x_1), r_q(x_2), \dots, r_q(x_N)),$$

где

$$r_q(x) = \begin{cases} x, & |x| > q \\ 0, & |x| \leq q \end{cases}.$$

Величины α^N будем рассчитывать по формуле

$$\alpha^N(t_m) = R_q(\alpha^N(t_{m-1}) + \tau/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)). \quad (5)$$

Величины k_1, k_2, k_3, k_4 вычисляются согласно схеме (4). Выбор параметра $q > 0$ осуществляется из эмпирических соображений. Имеет смысл выбирать q на порядок больше чем максимальное из значений δ_m .

Использование формулы (5) не вызывает сложности при программировании предлагаемой процедуры.

Покажем, что алгоритм, задаваемый формулой (5), является одной из реализацией метода квазирешений в теории регуляризации некорректных задач. Сделаем следующие предложения о разрешимости задач (1), (3).

Условие 1. Пусть существует $T > 0$ такое, что:

1. При $t \in [0, T]$ существует единственное решение задачи (1).
2. Решение задачи (1) принадлежит пространству $C^2([0, T]; \mathcal{D}_1)$, где множество \mathcal{D}_1 компактно в \mathcal{D} .
3. Для достаточно больших N при $t \in [0, T]$ существует единственное решение задачи (2), и это решение принадлежит пространству $C^2([0, T]; \mathcal{D}_1)$.

Методы, позволяющие проверить выполнение условий 1, получены в работах [10], [11]. Введем функционал невязки для задачи (1) по формуле

$$J(u) = \|u' - A[u]\|_{C([0, T]; H)}^2 + \|u(0) - \psi\|_H^2.$$

Очевидно, что функционал $J : C^1([0, T]; \mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывным. Функция $u \in C^1([0, T]; \mathcal{D})$ является решением задачи (1) тогда и только тогда, когда $J(u) = 0$.

В условии 1 задача нахождения приближенных решений задачи (1) может быть сведена к задаче нахождения последовательности u^l минимизирующей функционал J на множестве $C^2([0, T]; \mathcal{D}_1)$. Строить минимизирующую последовательность можно с помощью решений задачи (2).

Теорема 1. Пусть выполнено условие 1, тогда имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} J(u^N) = 0,$$

где u^N суть решения задачи (2). Более того, $\|u^N - u^*\|_{C^1([0,T];\mathcal{D})} \rightarrow 0$, при $N \rightarrow \infty$, где u^* — решение задачи (1).

Доказательство. Подставим приближенные решения u^N в функционал невязки

$$\begin{aligned} J(u^N) &= \|(u^N)' - A[u^N]\|_{C([0,T];H)}^2 + \|u^N(0) - \psi\|_H^2 = \\ &= \|(u^N)' - P_N A[u^N] - (I - P_N) A[u^N]\|_{C([0,T];H)}^2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} |\psi_k|^2 = \\ &= \|(I - P_N) A[u^N]\|_{C([0,T];H)}^2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} |\psi_k|^2. \end{aligned}$$

Второе слагаемое в последней сумме стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Рассмотрим величину

$$\|(I - P_N) A[u^N]\|_{C([0,T];H)}^2 = \max_{t \in [0,T]} \sum_{k=N+1}^{\infty} |(A[u^N], \varphi_k)_H|^2. \quad (6)$$

Поскольку при всех $t \in [0, T]$ имеем $u^N(t) \in \mathcal{D}_1$, то в силу компактности \mathcal{D}_1 в \mathcal{D} и непрерывности оператора $A : \mathcal{D} \rightarrow H$ получаем, что множество $A[u^N(t)]$ ограничено в H равномерно по N и $t \in [0, T]$. Поэтому величина (6) также стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$.

В силу компактности вложения пространства $C^2([0, T]; \mathcal{D}_1)$ в $C^1([0, T]; \mathcal{D})$ из последовательности u^N можно извлечь подпоследовательность u^{N_q} сходящуюся в $C^1([0, T]; \mathcal{D})$. Легко видеть, что пределом этой подпоследовательности является единственное решение задачи (1) функция u^* . Действительно, из непрерывности функционала J следует, что $J(\lim_{N_i \rightarrow \infty} u^{N_i}) = \lim_{N_i \rightarrow \infty} J(u^{N_i}) = 0$. На самом деле и сама последовательность u^N сходится к u^* . Пусть $\limsup_{N \rightarrow \infty} \|u^N - u^*\|_{C^1([0,T];\mathcal{D})} = \lim_{N_q \rightarrow \infty} \|u^{N_q} - u^*\|_{C^1([0,T];\mathcal{D})}$. В силу компактности в $C^1([0, T]; \mathcal{D})$ подпоследовательности u^{N_q} можно считать, что эта подпоследовательность имеет пределом v^* . Но тогда v^* тоже будет решением задачи (1), а значит имеем $v^* = u^*$. В итоге получаем, что $\limsup_{N \rightarrow \infty} \|u^N - u^*\|_{C^1([0,T];\mathcal{D})} = 0$. Следовательно имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|u^N - u^*\|_{C^1([0,T];\mathcal{D})} = 0. \quad \square$$

Теорема 1 является обоснованием известного в теории регуляризации некорректных задач метода квазирешений. В этой теореме рассматривается последовательность решений задач (2), однако вместо функций u^N , которые на практике недостижимы, можно рассматривать различные приближения в пространстве $C^2([0, T]; \mathcal{D}_1)$. Эти приближения можно получать с помощью метода Рунге-Кутты (4) и подходящего метода интерполяции по переменной t .

Пусть фиксировано достаточно большое N . Через u^{NM} обозначим последовательность полученную по схеме (4) по M точкам и последующим интерполированием с использованием стандартных кубических сплайнов по узлам $\{t_m\}$. Соответственно, через u_q^{NM} , $q > 0$ обозначим аналогичную последовательность, полученную по схеме (5).

Теорема 2. Пусть выполнено условие 1. Предположим, что $u^{NM}, u_q^{NM} \in C^2([0, T]; \mathcal{D}_1)$ и $\lim_{M \rightarrow \infty} \|u^{NM} - u^N\|_{C^2([0, T]; \mathcal{D}_1)} = 0$ при фиксированном N . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют N, M такие, что $J(u^{NM}) < \varepsilon$, также существуют, возможно другие, N, M и $q > 0$ такие, что $J(u_q^{NM}) < \varepsilon$.

Доказательство. В силу теоремы 1 существует такой номер N_0 , что $J(u^N) < \varepsilon/2$ для всех $N \geq N_0$. Введем обозначение $\Delta^{NM} = u^{NM} - u^N$. Из предположений теоремы следует, что $\Delta^{NM} \in C^2([0, T]; \mathcal{D}_1)$. Заметим, что по построению $u^{NM}(0) = u^N$. Имеем

$$J(u^{N_0 M}) = J(u^{N_0} + \Delta^{N_0 M}) = \|(u^{N_0})' - \Lambda[u^{N_0} + \Delta^{N_0 M}] + (\Delta^{N_0 M})'\|_{C([0, T]; H)}^2 + \|u^{N_0}(0) - \psi\|_H^2 \leq \| (u^{N_0})' - \Lambda[u^{N_0} + \Delta^{N_0 M}] \|_{C([0, T]; H)}^2 + \| (\Delta^{N_0 M})' \|_{C([0, T]; H)}^2 + \| u^{N_0}(0) - \psi \|_H^2.$$

Поскольку $\lim_{M \rightarrow \infty} \|\Delta^{N_0 M}\|_{C^2([0, T]; \mathcal{D}_1)} = 0$ и в силу непрерывности оператора $\Lambda : \mathcal{D} \rightarrow H$ существует такое M_0 , что при всех $M \geq M_0$ имеем

$$\|(\Delta^{N_0 M})'\|_{C([0, T]; H)}^2 \leq \varepsilon/4,$$

$$|J(u^{N_0}) - \| (u^{N_0})' - \Lambda[u^{N_0} + \Delta^{N_0 M}] \|_{C([0, T]; H)}^2| \leq \varepsilon/4.$$

Следовательно, для всех $N > N_0$ и $M > M_0$ имеем

$$J(u^{NM}) \leq \varepsilon.$$

Пусть теперь N_1 и M_1 таковы, что $J(u^{N_1 M_1}) < \varepsilon/2$. Обозначим $\Delta_q^{NM} = u_q^{NM} - u^{NM}$. По построению функций u_q^{NM} и в силу свойств кубических сплайнов имеем $\lim_{q \rightarrow 0} \|\Delta_q^{NM}\|_{C^2([0, T]; \mathcal{D}_1)} = 0$. Оценим значение функционала $J(u_q^{N_1 M_1})$. В силу непрерывности функционала $J : C^1([0, T]; \mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}$ существует такое $q_0 > 0$, что для всех $q < q_0$ имеем

$$|J(u^{N_1 M_1}) - J(u_q^{N_1 M_1})| = |J(u^{N_1 M_1}) - J(u^{N_1 M_1} + \Delta_q^{N_1 M_1})| < \varepsilon/2.$$

Следовательно, при всех $N > N_1, M > M_1, q < q_0$ выполнено

$$J(u_q^{NM}) \leq \varepsilon.$$

□

Теорема 2 дает возможность строить минимизирующую последовательность для функционала J с помощью приближений u_q^{NM} , которые можно строить конструктивно. А теорема 1 гарантирует, что минимизирующая последовательность сходится к решению задачи (1). В конкретных приложениях условия теорем 1, 2 часто могут быть легко проверены. В частности в задачах гидродинамики со свободной поверхностью, которые рассматриваются в следующем разделе, условия этих теорем выполнены, см. [11], [12].

4. Примеры в гидродинамике

4.1. Поверхностные волны идеальной жидкости

Перейдем к рассмотрению нестационарного течения идеальной жидкости со свободной поверхностью и конечной глубиной. Такие задачи рассматривались многими авторами,

например, [8], [4], [9]. В частности были получены теоремы о локальной (по времени) разрешимости уравнений, описывающих динамику поверхностных волн идеальной жидкости.

Пусть идеальная несжимаемая жидкость занимает область в плоскости (x, y) , ограниченную свободной поверхностью

$$\begin{aligned} -\bar{h} < y < \eta(x, t), \\ -\infty < x < \infty, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Считая движение жидкости потенциальным, мы имеем

$$v(x, y, t) = \nabla\Phi(x, y, t),$$

где $v(x, y, t)$ — двумерное поле скоростей, $\Phi(x, y, t)$ — потенциал. Из условия несжимаемости жидкости $\operatorname{div}v = 0$ следует, что потенциал скоростей удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\Phi(x, y, t) = 0.$$

С этим уравнением связываются следующие граничные и начальные условия:

$$\begin{aligned} (\eta_t + \Phi_x\eta_x - \Phi_y)|_{y=\eta(x,t)} &= 0, \\ (\Phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + gy)|_{y=\eta(x,t)} &= 0, \\ \Phi_y|_{y=-\bar{h}} &= 0, \\ \eta|_{t=0} &= \eta_0(x), \\ \Phi|_{t=0} &= \Phi_0(x, y). \end{aligned}$$

Здесь g — ускорение поля тяжести.

Удобно ввести величину $\Psi(x, t) = \Phi(x, \eta(x, t), t)$, которая является значением потенциала на свободной поверхности (см. [4]). В.Е. Захаровым было установлено, что переменные η и Ψ являются канонически сопряженными величинами, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial\eta}{\partial t} &= \frac{\delta H}{\delta\Psi}, \\ \frac{\partial\Psi}{\partial t} &= \frac{\delta H}{\delta\eta}, \end{aligned}$$

где гамильтониан H совпадает с полной энергией жидкости $H = T + U$,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\bar{h}}^{\eta(x,t)} |\nabla\Phi|^2 dy, \\ U &= \frac{g}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2(x, t) dx. \end{aligned}$$

Следуя работе [4], совершим конформное отображение области, занимаемой жидкостью в плоскости (x, y) в полупространство в переменных (u, v) .

$$-\infty < u < \infty, \quad -h < v < 0$$

После преобразования поверхность $\eta(x, t)$ может быть представлена в параметрическом виде

$$y = y(u, t), \quad x = u + \tilde{x}(u, t).$$

Переменные $\tilde{x}(u, t)$ и $y(u, t)$ связаны соотношением

$$y = R[\tilde{x}],$$

где оператор R — интегральный оператор вида

$$R[f](u) = \frac{1}{2h} v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u')}{\sinh(\pi/2h(u' - u))} du'.$$

Обратный к R оператор T имеет вид

$$T[f](u) = \frac{1}{h} v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u')}{1 - e^{-\pi/(h(u-u'))}} du'.$$

Как показано в работе [4], переменные $y(u, t)$ и $\Psi(u, t)$ полностью описывают движение жидкости и подчиняются следующей системе интегро-дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных по времени:

$$y_t = -y_u T \left[\frac{R[\Psi_u]}{J} \right] + x_u \frac{R[\Psi_u]}{J}, \quad (7)$$

$$\Psi_t = -\frac{\Psi_u^2 - (R[\Psi_u])^2}{2J} - T \left[\frac{R[\Psi_u]}{J} \right] \Psi_u - gy, \quad (8)$$

где $J = x_u^2 + y_u^2$ — якобиан отображения.

Уравнения (7)–(8) мы будем рассматривать с периодическими граничными условиями. Пусть $u \in (0, 2\pi)$, а функции y, Ψ представлены в виде:

$$y(u, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k(t) e^{iku}, \quad \Psi(u, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Psi_k(t) e^{iku}. \quad (9)$$

Операторы R и T в фурье-представлении имеют простой вид:

$$\begin{aligned} y_k &= R_k \tilde{x}_k, & R_k &= i \tanh kh \\ \tilde{x}_k &= T_k y_k, & T_k &= -i \coth kh \end{aligned}$$

Операция дифференцирования по переменной u в Фурье-представлении имеет обычный вид:

$$D_k = ik.$$

Для вычисления операторов R, T, D мы будем применять быстрое преобразование Фурье.

Численный эксперимент 1. Рассмотрим стоячие волны идеальной жидкости с конечной глубиной. Выберем следующие параметры глубина: $h = 6.0$, ускорение свободного падения $g = 1.0$, шаг по времени: $\tau = 0.001$. В качестве начальных условий возьмем следующие функции:

$$y(0, u) = 0.01 \cos u, \quad \Psi(0, u) = 0.$$

Аппроксимируем ряды (9) конечными суммами с $N = 512$ слагаемыми и будем применять численные схемы, описанные выше. Мы будем рассматривать спектры решений в логарифмическом масштабе: по оси абсцисс будем откладывать номер гармоники k , а по оси ординат — $\lg |y_k|$ и $\lg |\Psi_k|$. Приведем результаты численного эксперимента, которому был присвоен номер **ZF-2-3** в системе учета вычислительных экспериментов www.calcs.ru. В этом эксперименте расчет проводился по схеме (4) — на рисунке 1 показан спектр решения при $t = 20.0$. Гармоники с номерами от 0 до 25 характеризуют собственно решение,

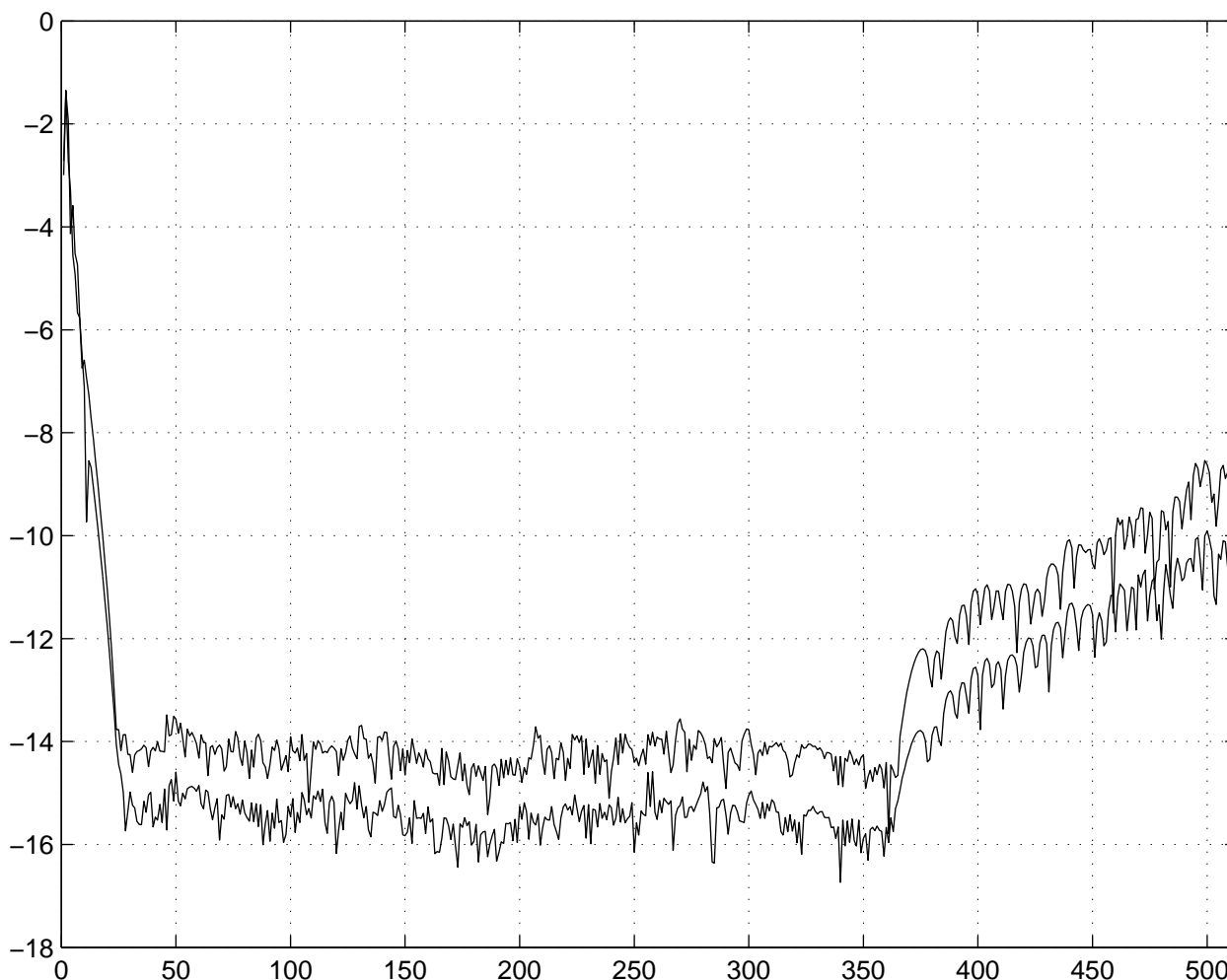
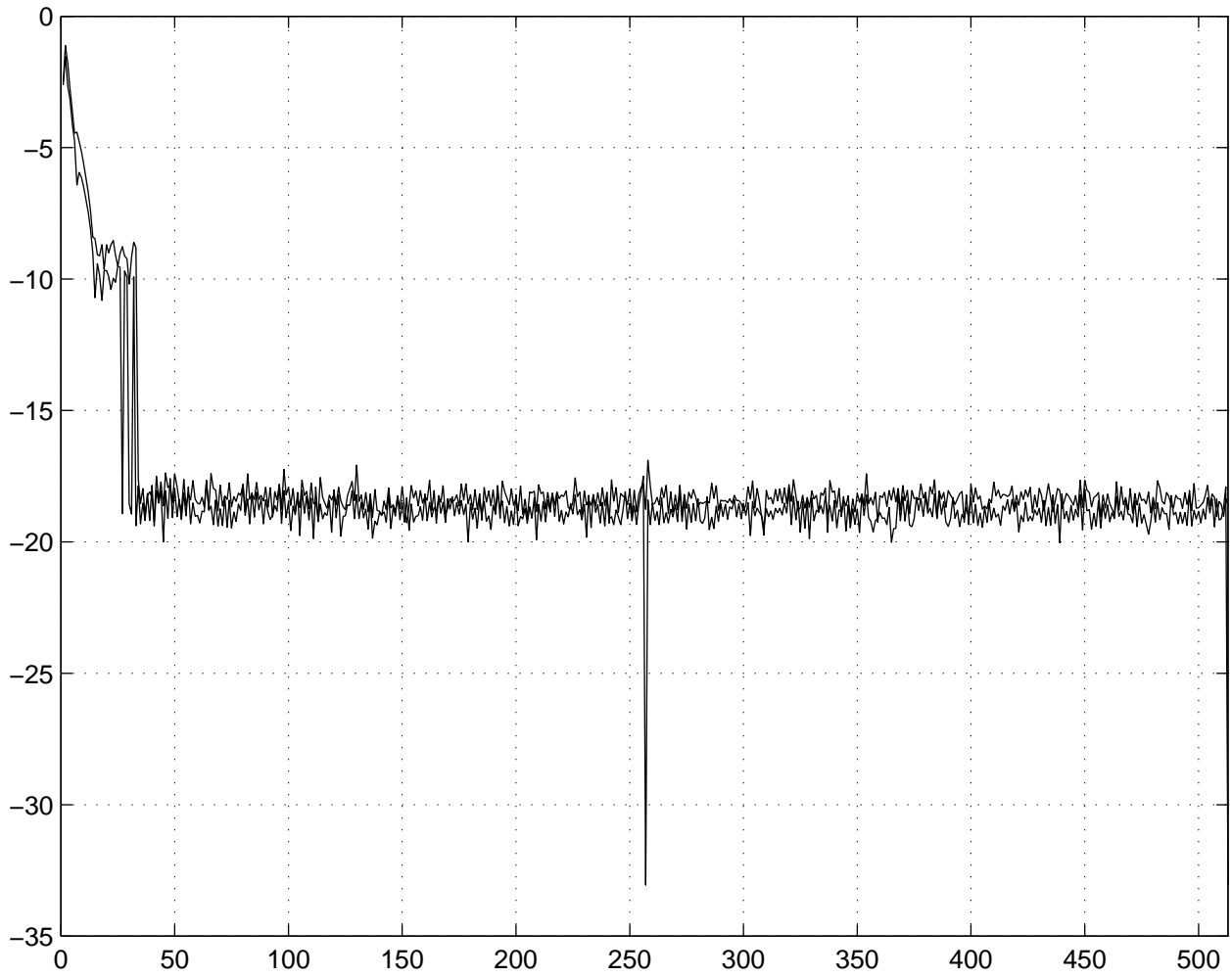


Рис. 1. Счет по схеме (4), $t = 20.0$

горизонтальная часть спектра с гармониками от 26 до 360 обусловлена конечностью машинной точности при вычислениях. Растущая часть спектра с гармониками от 360 до 511 результат вычислительной неустойчивости схемы (4) в условиях машинной точности.

В численном эксперименте **ZF-2-4** применялась модифицированная схема метода прямых (5), с выбранным $q = 10^{-12}$, с тем же начальным условием. На рисунке 2 показан спектр решения при $t = 100.0$. В отличие от случая на рисунке 1 здесь мы не наблюдаем вычислительной неустойчивости.

Рис. 2. Счет по схеме (5), $t = 100.0$

4.2. Неустойчивость Релея-Тейлора

Неустойчивое течение Релея-Тейлора мы будем рассчитывать, используя уравнения Дьяченко, полученные в [5]. Эти уравнения являются модификацией уравнений (7)–(8) для случая бесконечной глубины.

Образуем пару комплексных функций $z(w, t) = x(w, t) + iy(w, t)$ и на действительной оси $\Pi(u, t) = \Psi(u, t) + i\mathcal{H}[\Psi(u, t)]$, где $w = u + iv$. Введем новые переменные $R(w, t)$ и $V(w, t)$ по следующим формулам:

$$R(w, t) = \frac{1}{z_w}, \quad V(w, t) = i \frac{\Pi_w}{z_w}.$$

Функции R и V аналитичны в нижней полуплоскости и удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} R(w, t) &\rightarrow 1, & |w| &\rightarrow \infty, & \operatorname{Im} w &\leq 0, \\ V(w, t) &\rightarrow 0, & |w| &\rightarrow \infty, & \operatorname{Im} w &\leq 0. \end{aligned}$$

Как показано в работе [5], функции R и V удовлетворяют следующей системе интегродифференциальных уравнений:

$$R_t = i(UR_w - U_w R), \quad (10)$$

$$V_t = i(UV_w - B_w R) + g(R - 1), \quad (11)$$

где $U = P(V\bar{R} + \bar{V}R)$, $B = P(V\bar{V})$, $P = \frac{1}{2}(I + i\mathcal{H})$ — интегральный оператор. Эти уравнения называются уравнениями Дьяченко. Разрешимость уравнений (10)–(11) рассматривалась в [10]–[11]. Сходимость численных методов была установлена в работе [12].

При моделировании неустойчивости Релея-Тейлора мы будем рассматривать течение жидкости со свободной поверхностью, полагая ускорение свободного падения отрицательным.

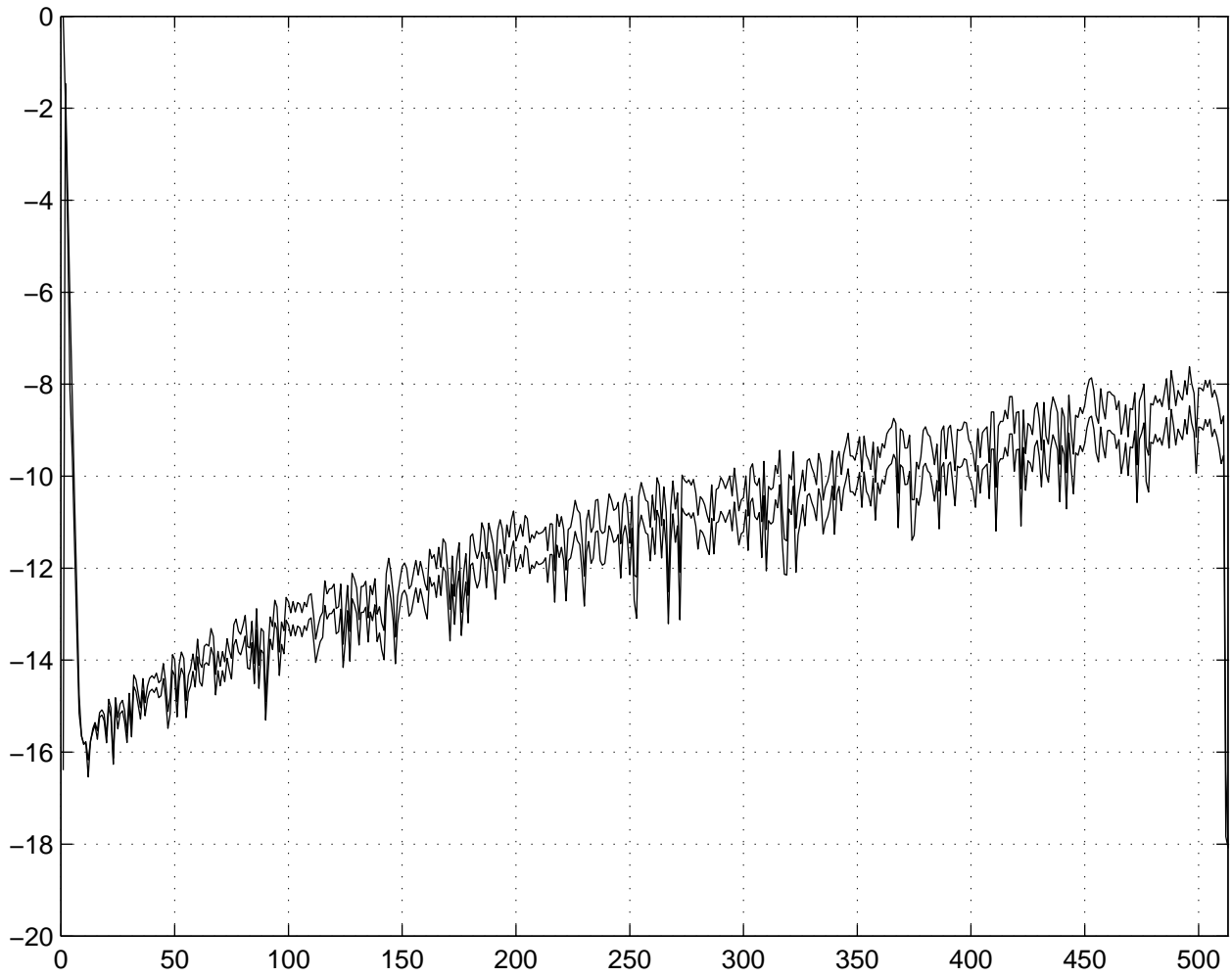
Численный эксперимент 2. Для проведения численных расчетов будем использовать метод прямых, принимая $N = 512$. Выберем следующие параметры: ускорение свободного падения $g = -10.0$, шаг по времени: $\tau = 0.0001$. В качестве начальных условий возьмем следующие функции:

$$R(0, w) = 1 + 0.01 \exp(-iw), \quad V(0, w) = 0.$$

Проведем результаты численного эксперимента **РТ-3-5**, где расчет проводился по схеме (4). На рисунке 3 показан спектр решения при $t = 0.3$. Первые гармоники от 0 до 10 характеризуют решение, а возрастающие по модулю гармоники (от 10) выражают факт неустойчивости. В данном примере мы сталкиваемся с неустойчивостью самих уравнений. Возникающие погрешности вычислений быстро разрушают численный счет.

В численном эксперименте **РТ-3-6** проверим нашу модифицированную схему (5) с этом случае с параметром $q = 10^{-12}$. На рисунке 4 показан спектр решения при $t = 1.55$. Здесь мы не наблюдаем какой-либо вычислительной неустойчивости. Разумеется, дальнейший счет по схеме (5) требует увеличения размерности N , и приводит к разрушению гладкого решения, но это следствие неустойчивости течения Релея-Тейлора. На рисунке 5 показан профиль свободной поверхности течения при $t = 1.55$.

Автор выражает глубокую благодарность академику РАН В.Е. Захарову и доктору физ.-мат. наук А.И. Дьяченко за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также доктору физ.-мат. наук Л.Б. Чубарову за ряд ценных замечаний и полезное обсуждение.

Рис. 3. Счет по схеме (4), $t = 0.3$

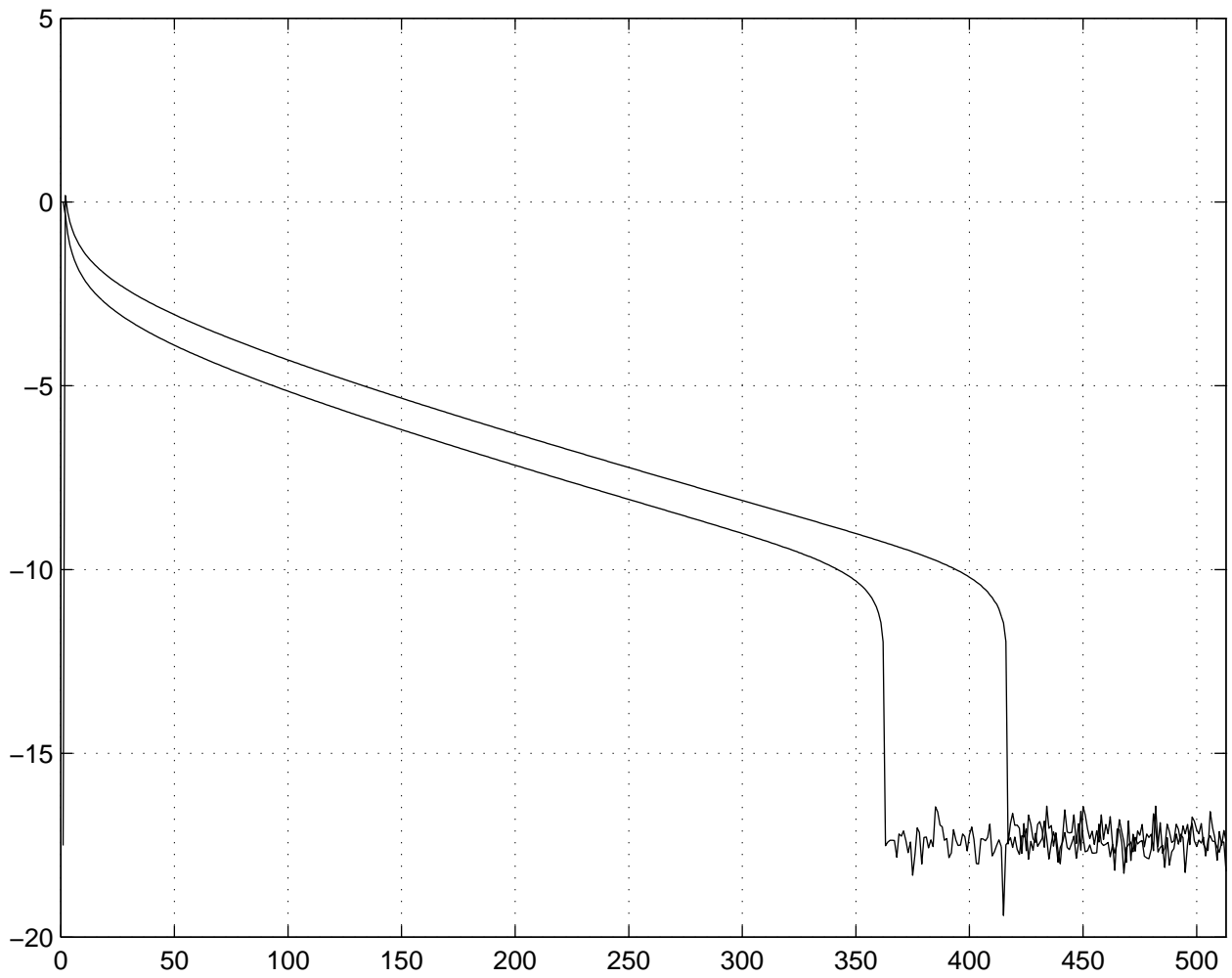


Рис. 4. Счет по схеме (5), $t = 1.55$

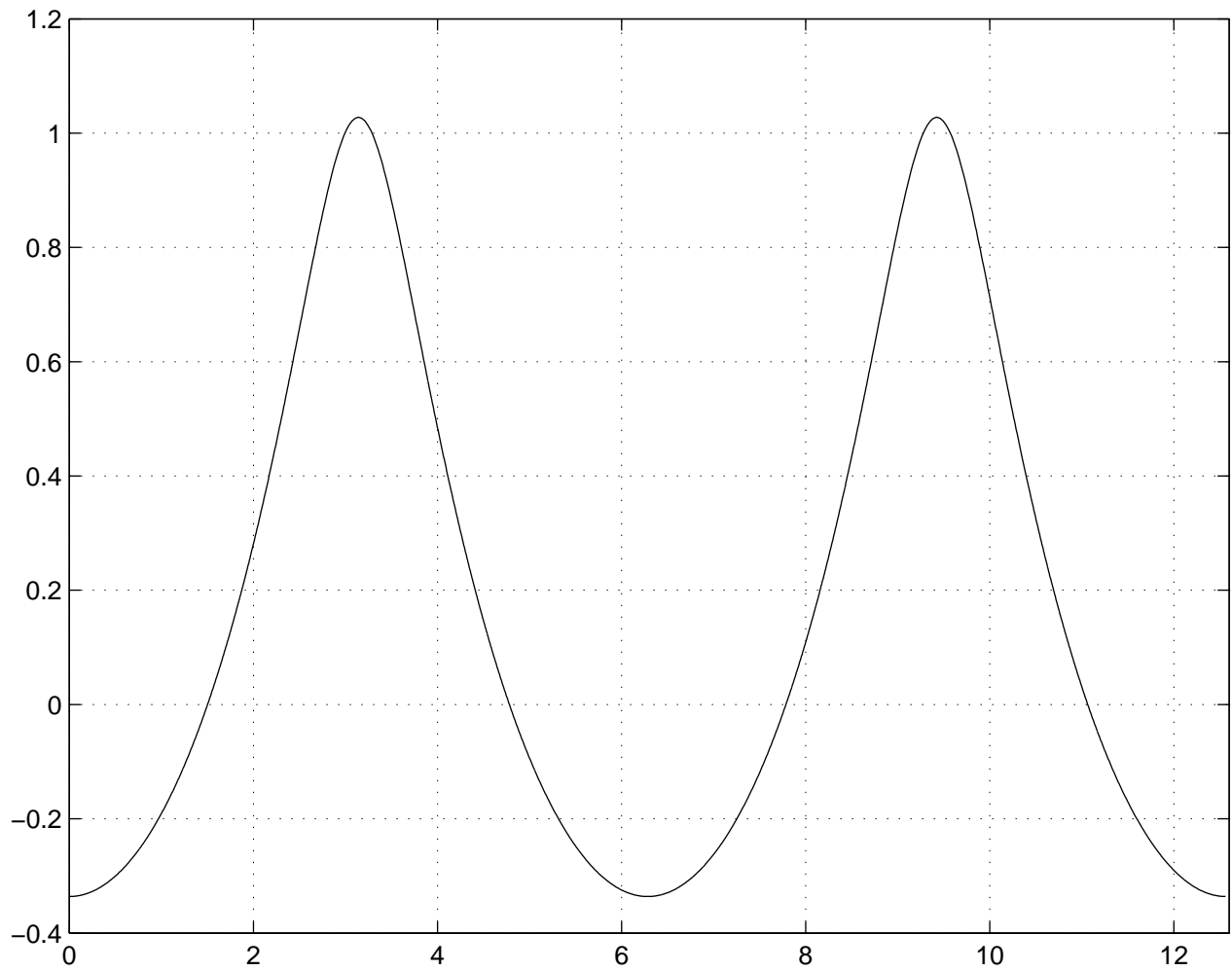


Рис. 5. Профиль свободной поверхности при $t = 1.55$

Список литературы

- [1] Шокин Ю.И. Интервальный анализ. — Новосибирск: Наука, 1981. — 112 с.
- [2] КАЛМЫКОВ С.А., ШОКИН Ю.И., ЮЛДАШЕВ З.Х. Методы интервального анализа. — Новосибирск: Наука, 1986. — 224 с.
- [3] АЛЕФЕЛЬД Г., ХЕРЦБЕРГЕР Ю. Введение в интервальные вычисления. — М.: Мир, 1987. — 360 с.
- [4] ДЬЯЧЕНКО А. И., ЗАХАРОВ В. Е., КУЗНЕЦОВ Е. А. Нелинейная динамика свободной поверхности идеальной жидкости // Физика плазмы, 1999, т. 22, N 10, с. 916–928.
- [5] ZAKHAROV V. E., DYACHENKO A. I., VASILYEV O. A. New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface // European Journal of Mechanics B/Fluids 21, 2002, p. 283–291.
- [6] TAYLOR G. The Instability of Liquid Surface when Accelerated in Direction Perpendicular to their Planes. I // Proc. Roy. Soc. 1950, T. 201. Ser. A, N 1065. P. 192–196.
- [7] ИННОГАМОВ Н.А. Турбулентная стадия тейлоровской неустойчивости // Письма ЖТФ, 1978, т. 4, вып. 12, с. 743–747.
- [8] НАЛИМОВ В.И. Нестационарные вихревые волны // Сибирский математический журнал, 1996, т. 37, N 6, с. 1356–1366.
- [9] CRAIG W., SULEM C. Numerical simulation of gravity waves, J. Comput. Phys. 108 (1993), p. 73–83.
- [10] ШАМИН Р.В. О существовании гладких решений уравнений Дьяченко, описывающих неустановившиеся течения идеальной жидкости со свободной поверхностью // Доклады Российской академии наук, 2006, т. 406, N 5, с. 112–113.
- [11] ШАМИН Р.В. К вопросу об оценке времени существования решений системы Коши-Ковалевской с примерами в гидродинамике со свободной поверхностью // Современная математика. Фундаментальные направления. Том 21 (2007), с. 133–148.
- [12] ШАМИН Р.В. Об одном численном методе в задаче о движении идеальной жидкости со свободной поверхностью // Сибирский журнал вычислительной математики, 2006, т. 9, N 4, с. 325–340.

Ключевые слова: *гидродинамика со свободной поверхностью, численное моделирование, регуляризация*

Key words: *hydrodynamics with free surface, numeric simulations, regularization*