

Аппроксимация эволюционных дифференциальных уравнений в шкалах гильбертовых пространств

Р. В. Шамин

К эволюционным дифференциальным уравнениям в гильбертовых пространствах относится большое количество задач, возникающих в различных областях естествознания. При этом возникает необходимость в аппроксимации бесконечномерных систем конечномерными уравнениями (системами обыкновенных дифференциальных уравнений). При аппроксимации эволюционных уравнений в шкалах гильбертовых пространств возможно достичь высокой эффективности при использовании вычислительной техники. В настоящей работе рассматривается вопрос об оценке времени существования решений и аппроксимаций в выбранных шкалах пространств. Приведенные результаты позволяют строить конструктивные методы для получения такой оценки в конкретных случаях. Заметим, что вопрос о времени существования решения в шкалах пространств актуален как для линейных уравнений, для которых имеют место результаты о глобальной разрешимости, так и для нелинейных систем, для которых время существования решений конечно.

Пусть H – гильбертово пространство. Всюду в статье гильбертовы пространства предполагаются сепарабельными и бесконечномерными. Через e_k обозначим ортонормированный базис в H . Введем непрерывный, вообще говоря, нелинейный оператор $A: D \rightarrow H$, где D – гильбертово пространство, плотно и непрерывно вложенное в H , такое, что $\{e_k\} \subset D$. Будем рассматривать задачу Коши

$$u'(t) = Au(t), \quad t \in (0, T) \quad (1)$$

$$u(0) = \varphi, \quad \varphi \in H. \quad (2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Решением задачи (1), (2) на $(0, T)$ будем называть функцию $u \in L_2(0, T; D)$, $u' \in L_2(0, T; H)$, удовлетворяющую (1), (2).*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В силу замечания 2.2 [1] функция $u \in L_2(0, T; D)$, $u' \in L_2(0, T; H)$ имеет след $u(0) \in H$.

Для построения шкалы гильбертовых пространств рассмотрим определенную для $k = 1, 2, \dots$ и $s \geq 0$ систему функций $\{\gamma_k(s)\}$ такую, что для каждого фиксированного k имеет место: $\gamma_k(s) > 0$, $\gamma_k(0) = 1$, $\gamma_k(s)$ непрерывны и строго убывают по s . Пространства H_s , $s \geq 0$, введем как замыкание всех линейных оболочек $\sum_{k=1}^N u_k e_k$ по норме

$$\|u\|_{H_s}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^2 \gamma_k^{-2}(s), \quad \text{где } u_k = (u, e_k)_H.$$

Введем конечномерный проектор P_N в пространстве H по формуле

$$P_N \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k e_k \right) = \sum_{k=1}^N u_k e_k.$$

Задачу (1), (2) будем аппроксимировать конечномерными задачами

$$(u^N)'(t) = P_N A u^N(t), \quad t \in (0, T) \quad (3)$$

$$u^N(0) = P_N \varphi, \quad \varphi \in H. \quad (4)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 07-01-00268-а, 07-05-00648-а, 07-05-92211-НЦНИЛ_а).

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. *Существуют такие числа $s_l > 0$ и $t_l > 0$, $l = 0, 1, \dots$, что при всех N задача (3), (4) имеет единственное решение $u^N(t) \in H_{s_l}$ при $t \in (0, t_N)$, а задача (1), (2) имеет единственное решение u на $(0, t_0)$, и при почти всех $t \in (0, t_0)$ это решение принадлежит H_{s_0} . При этом для некоторого $T > 0$ имеет место*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|u^N - u\|_{L_2(0, T; H_{s_0})} = 0.$$

Для любого элемента $u \in H_s$, $s > 0$, введем функцию

$$\nu(u) = \varliminf_{k \rightarrow \infty} \nu_k(u_k),$$

где функция $\nu_k(u_k)$ такая, что $\gamma_k(\nu_k(u_k)) = |u_k|$ для $1 \geq |u_k| > 0$, для $u_k > 1$ полагаем $\nu(u_k) = 0$, для $u_k = 0$ имеем $\nu(0) = \infty$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $u \in H_s$, тогда $\nu(u) \geq s$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем представление $|u_k| = \alpha_k \gamma_k(s)$, где $\alpha_k \in l_2$. Без ограничения общности будем считать, что $\alpha_k < 1$. Поскольку функция $\nu_k(a)$ не возрастает, имеем

$$\nu_k(|u_k|) = \nu_k(\alpha_k \gamma_k(s)) \geq \nu_k(\gamma_k(s)) = s.$$

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma_k(s_2)}{\gamma_k(s_1)} \right)^2$$

сходится для $0 < s_1 < s_2$, тогда для $u \in H_0$ такого, что $\nu(u) = s$, $0 < s < \infty$, имеет место

$$u \in H_{s-\varepsilon} \quad \text{для любого } \varepsilon \in (0, s).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть фиксировано $\varepsilon \in (0, s)$. Обозначим $\delta_k = \nu_k(u_k) - s$. Поскольку $\varliminf_{k \rightarrow \infty} \nu_k(u_k) = \nu(u) = s$, существует такое $K > 0$, что $\delta_k > -\varepsilon$ при $k \geq K$. В этом случае имеем $|u_k| = \gamma_k(s + \delta_k)$, $k \geq K$. В силу условия на $\gamma_k(s)$ получаем

$$\|u\|_{H_{s-\varepsilon}}^2 = \sum_{k=1}^{K-1} |u_k|^2 \gamma_k^{-2}(s - \varepsilon) + \sum_{k=K}^{\infty} \left(\frac{\gamma_k(s_2)}{\gamma_k(s_1)} \right)^2 < \infty.$$

Для важного в приложениях случая, когда $\gamma_k(s) = e^{-ks}$, получен результат об оценке функции $\nu(u)$ по значениям $\nu_k(u_k^N)$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $\gamma_k(s) = e^{-ks}$; предположим, что выполнено предположение 1 и функции u^N суть решения задачи (3), (4), а функция u есть решение задачи (1), (2). Для $t \in (0, T)$, где T – величина из предположения 1, если $\nu(u(t)) = s$, $0 < s < \infty$, то для любого $0 < \varepsilon < s$ существует константа $C_\varepsilon > 0$, не зависящая от N и k , такая, что*

$$\nu_k(u_k^N(t)) - \nu(u(t)) \leq C_\varepsilon \frac{1}{k} + \varepsilon, \quad k \leq N.$$

Доказательство теоремы 3 обобщает доказательство теоремы 2.1 [2].

В качестве примера рассмотрим абстрактные параболические уравнения. Пусть V – гильбертово пространство, плотно и непрерывно вложенное в H . Рассмотрим линейный непрерывный оператор $L: V \rightarrow V'$, являющийся V -коэрцитивным, т.е. $\operatorname{Re}(Lv, v) \geq \|v\|_V^2$ для любого $v \in V$. Введем замкнутый неограниченный оператор $L: D(L) \subset H \rightarrow H$, где

$$D(L) = \{u \in V : Lu \in H\}.$$

Оператор в уравнении (1) зададим следующим образом:

$$Au(t) = -Lu(t) + f(t), \quad \text{где } f \in L_2(0, T; H).$$

В работах [1], [3] приведены примеры V -коэрцитивных операторов из числа функционально-дифференциальных операторов, которые имеют важные приложения (см. [4]). Используя результаты упомянутых работ, можно показать, что при $\varphi \in V$ выполнено предположение 1.

Другим важным примером являются нелинейные системы Коши–Ковалевской. Такие системы в гильбертовых пространствах изучались во многих работах, например, [5]–[8]. В работе [2] теорема 3 применялась для получения конструктивных оценок времени существования аналитических решений для нелинейных систем Коши–Ковалевской. В работе [9] эти результаты позволили решить важный вопрос о разрешимости уравнений, описывающих поверхностные волны идеальной жидкости, на конечном интервале по времени.

Автор выражает глубокую благодарность проф. А.Л. Скубачевскому за внимание к работе и ряд важных советов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р.В. Шамин, *Матем. сб.*, **194**:9 (2003), 141–156. [2] Р.В. Шамин, *Труды семинара по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям в РУДН под руководством А.Л. Скубачевского*, СМФН, **21**, РУДН, М., 2007, 133–148. [3] Р.В. Шамин, *Матем. заметки*, **71**:4 (2002), 636–640. [4] A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional-Differential Equations and Applications*, Oper. Theory Adv. Appl., **91**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1997. [5] Л.В. Овсянников, *Докл. АН СССР*, **200**:4 (1971), 789–792. [6] T. Nishida, *J. Differential Geom.*, **12**:4 (1977), 629–633. [7] F. Trèves, *Ovsyannikov Theorem and Hyperdifferential Operators*, Notas Mat., **46**, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1968. [8] Ю.А. Дубинский, *Задача Коши в комплексной области*, Изд-во МЭИ, М., 1996. [9] Р.В. Шамин, *Вычислительные эксперименты в моделировании поверхностных волн в океане*, Наука, М., 2008.

Р. В. Шамин

Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН, Москва

E-mail: roman@shamin.ru

Поступило

10.07.2008