Аппроксимация эволюционных дифференциальных уравнений в шкалах гильбертовых пространств

Р. В. Шамин

К эволюционным дифференциальным уравнениям в гильбертовых пространствах относится большое количество задач, возникающих в различных областях естествознания. При этом возникает необходимость в аппроксимации бесконечномерных систем конечномерными уравнениями (системами обыкновенных дифференциальных уравнений). При аппроксимации эволюционных уравнений в шкалах гильбертовых пространств возможно достичь высокой эффективности при использовании вычислительной техники. В настоящей работе рассматривается вопрос об оценке времени существования решений и аппроксимаций в выбранных шкалах пространств. Приведенные результаты позволяют строить конструктивные методы для получения такой оценки в конкретных случаях. Заметим, что вопрос о времени существования решения в шкалах пространств актуален как для линейных уравнений, для которых имеют место результаты о глобальной разрешимости, так и для нелинейных систем, для которых время существования решений конечно.

Пусть H – гильбертово пространство. Всюду в статье гильбертовы пространства предполагаются сепарабельными и бесконечномерными. Через e_k обозначим ортонормированный базис в H. Введем непрерывный, вообще говоря, нелинейный оператор $A\colon D \to H$, где D – гильбертово пространство, плотно и непрерывно вложенное в H, такое, что $\{e_k\} \subset D$. Будем рассматривать задачу Коши

$$u'(t) = Au(t), \qquad t \in (0,T) \tag{1}$$

$$u(0) = \varphi, \qquad \varphi \in H. \tag{2}$$

Определение 1. *Решением задачи* (1), (2) на $(0,T)$ будем называть функцию $u \in L_2(0,T;D)$, $u' \in L_2(0,T;H)$, удовлетворяющую (1), (2).

Замечание 1. В силу замечания 2.2 [1] функция $u \in L_2(0,T;D)$, $u' \in L_2(0,T;H)$ имеет след $u(0) \in H$.

Для построения шкалы гильбертовых пространств рассмотрим определенную для $k = 1,2,\dots$ и $s \geqslant 0$ систему функций $\{\gamma_k(s)\}$ такую, что для каждого фиксированного k имеет место: $\gamma_k(s) > 0$, $\gamma_k(0) = 1$, $\gamma_k(s)$ непрерывны и строго убывают по s. Пространства H_s, $s \geqslant 0$, введем как замыкание всех линейных оболочек $\sum_{k=1}^{N} u_k e_k$ по норме

$$\|u\|_{H_s}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^2 \gamma_k^{-2}(s), \qquad \text{где} \quad u_k = (u, e_k)_H.$$

Введем конечномерный проектор P_N в пространстве H по формуле

$$P_N\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{N} u_k e_k.$$

Задачу (1), (2) будем аппроксимировать конечномерными задачами

$$(u^N)'(t) = P_N A u^N(t), \qquad t \in (0,T) \tag{3}$$

$$u^N(0) = P_N\varphi, \qquad \varphi \in H. \tag{4}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 07-01-00268-а, 07-05-00648-а, 07-05-92211-НЦНИЛ_а).

Предположение 1. *Существуют такие числа* $s_l > 0$ *и* $t_l > 0$, $l = 0, 1, \dots,$ *что при всех* N *задача* (3), (4) *имеет единственное решение* $u^N(t) \in H_{s_l}$ *при* $t \in (0, t_N)$, *а задача* (1), (2) *имеет единственное решение* u *на* $(0, t_0)$, *и при почти всех* $t \in (0, t_0)$ *это решение принадлежит* H_{s_0}. *При этом для некоторого* $T > 0$ *имеет место*

$$\lim_{N\to\infty} \|u^N - u\|_{L_2(0,T;H_{s_0})} = 0.$$

Для любого элемента $u \in H_s$, $s > 0$, введем функцию

$$\nu(u) = \varliminf_{k\to\infty} = \nu_k(u_k),$$

где функция $\nu_k(u_k)$ такая, что $\gamma_k(\nu_k(u_k)) = |u_k|$ для $1 \geqslant |u_k| > 0$, для $u_k > 1$ полагаем $\nu(u_k) = 0$, для $u_k = 0$ имеем $\nu(0) = \infty$.

Теорема 1. *Пусть* $u \in H_s$, *тогда* $\nu(u) \geqslant s$.

Доказательство. Имеем представление $|u_k| = \alpha_k \gamma_k(s)$, где $\alpha_k \in l_2$. Без ограничения общности будем считать, что $\alpha_k < 1$. Поскольку функция $\nu_k(a)$ не возрастает, имеем

$$\nu_k(|u_k|) = \nu_k(\alpha_k \gamma_k(s)) \geqslant \nu_k(\gamma_k(s)) = s.$$

Теорема 2. *Предположим, что ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma_k(s_2)}{\gamma_k(s_1)}\right)^2$$

сходится для $0 < s_1 < s_2$, *тогда для* $u \in H_0$ *такого, что* $\nu(u) = s$, $0 < s < \infty$, *имеет место*

$$u \in H_{s-\varepsilon} \qquad \text{для любого} \quad \varepsilon \in (0, s).$$

Доказательство. Пусть фиксировано $\varepsilon \in (0, s)$. Обозначим $\delta_k = \nu_k(u_k) - s$. Поскольку $\varliminf_{k\to\infty} \nu_k(u_k) = \nu(u) = s$, существует такое $K > 0$, что $\delta_k > -\varepsilon$ при $k \geqslant K$. В этом случае имеем $|u_k| = \gamma_k(s + \delta_k)$, $k \geqslant K$. В силу условия на $\gamma_k(s)$ получаем

$$\|u\|^2_{H_{s-\varepsilon}} = \sum_{k=1}^{K-1} |u_k|^2 \gamma_k^{-2}(s - \varepsilon) + \sum_{k=K}^{\infty} \left(\frac{\gamma_k(s_2)}{\gamma_k(s_1)}\right)^2 < \infty.$$

Для важного в приложениях случая, когда $\gamma_k(s) = e^{-ks}$, получен результат об оценке функции $\nu(u)$ по значениям $\nu_k(u_k^N)$.

Теорема 3. *Пусть* $\gamma_k(s) = e^{-ks}$; *предположим, что выполнено предположение* 1 *и функции* u^N *суть решения задачи* (3), (4), *а функция* u *есть решение задачи* (1), (2). *Для* $t \in (0, T)$, *где* T – *величина из предположения* 1, *если* $\nu(u(t)) = s$, $0 < s < \infty$, *то для любого* $0 < \varepsilon < s$ *существует константа* $C_\varepsilon > 0$, *не зависящая от* N *и* k, *такая, что*

$$\nu_k(u_k^N(t)) - \nu(u(t)) \leqslant C_\varepsilon \frac{1}{k} + \varepsilon, \qquad k \leqslant N.$$

Доказательство теоремы 3 обобщает доказательство теоремы 2.1 [2].

В качестве примера рассмотрим абстрактные параболические уравнения. Пусть V – гильбертово пространство, плотно и непрерывно вложенное в H. Рассмотрим линейный непрерывный оператор $L\colon V \to V'$, являющийся V-коэрцитивным, т.е. $\mathrm{Re}\langle Lv, v\rangle \geqslant \|v\|_V^2$ для любого $v \in V$. Введем замкнутый неограниченный оператор $L\colon D(L) \subset H \to H$, где

$$D(L) = \{u \in V : Lu \in H\}.$$

Оператор в уравнении (1) зададим следующим образом:

$$Au(t) = -Lu(t) + f(t), \qquad \text{где} \quad f \in L_2(0,T;H).$$

В работах [1], [3] приведены примеры V-коэрцитивных операторов из числа функционально-дифференциальных операторов, которые имеют важные приложения (см. [4]). Используя результаты упомянутых работ, можно показать, что при $\varphi \in V$ выполнено предположение 1.

Другим важным примером являются нелинейные системы Коши–Ковалевской. Такие системы в гильбертовых пространствах изучались во многих работах, например, [5]–[8]. В работе [2] теорема 3 применялась для получения конструктивных оценок времени существования аналитических решений для нелинейных систем Коши–Ковалевской. В работе [9] эти результаты позволили решить важный вопрос о разрешимости уравнений, описывающих поверхностные волны идеальной жидкости, на конечном интервале по времени.

Автор выражает глубокую благодарность проф. А. Л. Скубачевскому за внимание к работе и ряд важных советов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Р. В. Шамин, *Матем. сб.*, **194**:9 (2003), 141–156. **[2]** Р. В. Шамин, *Труды семинара по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям в РУДН под руководством А. Л. Скубачевского*, СМФН, **21**, РУДН, М., 2007, 133–148. **[3]** Р. В. Шамин, *Матем. заметки*, **71**:4 (2002), 636–640. **[4]** A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional-Differential Equations and Applications*, Oper. Theory Adv. Appl., **91**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1997. **[5]** Л. В. Овсянников, *Докл. АН СССР*, **200**:4 (1971), 789–792. **[6]** T. Nishida, *J. Differential Geom.*, **12**:4 (1977), 629–633. **[7]** F. Tréves, *Ovcyannikov Theorem and Hyperdifferential Operators*, Notas Mat., **46**, Instituto de Mathemática Pure e Aplicada, Rio de Janeiro, 1968. **[8]** Ю. А. Дубинский, *Задача Коши в комплексной области*, Изд-во МЭИ, М., 1996. **[9]** Р. В. Шамин, *Вычислительные эксперименты в моделировании поверхностных волн в океане*, Наука, М., 2008.

Р. В. Шамин
Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН, Москва
E-mail: roman@shamin.ru

Поступило
10.07.2008