Математические заметки

том 71 выпуск 4 апрель 2002

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ПРОСТРАНСТВА НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Р. В. Шамин

Пространство начальных данных для параболических дифференциально-разностных уравнений получается при интерполяции области определения соответствующего эллиптического оператора. Область определения эллиптических функционально-дифференциальных операторов может содержать негладкие функции [1]. Этим затруднено исследование пространств начальных данных для параболических функционально-дифференциальных уравнений, см. [2].

В настоящей работе изучаются пространства начальных данных для абстрактных параболических уравнений. Полученные результаты применяются к параболическим функционально-дифференциальным уравнениям. Параболические функционально-дифференциальные уравнения возникают в задачах нелинейной оптики [3]–[5]. Эти уравнения изучались в [2], [6].

Пусть V и H – сепарабельные гильбертовы пространства и V плотно и непрерывно вложено в H. Отождествим пространство H с его сопряженным, тогда мы получаем $V \subset H \subset V'$, где каждое пространство плотно в последующем. Рассмотрим непрерывный оператор $A\colon V \to V'$.

Определение 1. Оператор A называется V-*коэрцитивным*, если для любого $v \in V$ существует $c_1 > 0$, не зависящая от v, такая, что $\operatorname{Re}\langle Av, v\rangle \geqslant c_1\|v\|_V^2$.

В дальнейшем будем предполагать, что оператор A является V-коэрцитивным.

Введем замкнутый неограниченный оператор $\mathscr{A} : \mathscr{D}(\mathscr{A}) \subset H \to H$, где $\mathscr{D}(\mathscr{A}) = \{u \in V : Au \in H\}$. Оператор $\mathscr{A}$ есть сужение оператора A на $\mathscr{D}(\mathscr{A})$. Рассмотрим гильбертово пространство $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ со скалярным произведением $(u, v)_{\mathscr{D}(\mathscr{A})} = (\mathscr{A}u, \mathscr{A}v)_H + (u, v)_H$. Введем также неограниченный оператор $\mathscr{A}'\colon \mathscr{D}(\mathscr{A}') \subset H \to H$ по формуле $\mathscr{A}'u = \mathscr{A}^*u$, где $u \in \mathscr{D}(\mathscr{A}') = \{u \in V\colon A^*u \in H\}$. Гильбертово пространство $\mathscr{D}(\mathscr{A}')$ введем аналогично пространству $\mathscr{D}(\mathscr{A})$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-01030, и фонда INTAS, грант № 97-30551.

Введем гильбертово пространство

$$\mathscr{W}(\mathscr{A}) = \{w \in L_2(0,T;\mathscr{D}(\mathscr{A}))\colon w' \in L_2(0,T;H)\}$$

со скалярным произведением

$$(u,v)_{\mathscr{W}(\mathscr{A})} = \int_0^T (u',v')_H\,dt + \int_0^T (\mathscr{A}u,\mathscr{A}v)_H\,dt + \int_0^T (u,v)_H\,dt,$$

где производные по t понимаются в смысле распределений.

Для произвольного гильбертова пространства X, плотного в H и непрерывно в него вложенного, введем интерполяционные пространства

$$[H,X]_\theta = \biggl\{u \in H\colon \|u\|_{[H,X]_\theta} = \biggl(\int_0^\infty t^{-(2\theta+1)}K^2(t,u)\,dt\biggr)^{1/2} < \infty\biggr\}, \qquad 0<\theta<1,$$
$$K(t,u) = \inf_{u=u_0+u_1,\,u_0\in H,\,u_1\in X}(\|u_0\|_H + t\|u_1\|_X).$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение в пространстве H

$$u'(t) + \mathscr{A}u(t) = f(t), \qquad t \in (0,T), \tag{1}$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = \varphi, \tag{2}$$

где $0 < T < \infty$, $f \in L_2(0,T;H)$ и $\varphi \in H$.

Определение 2. Функция $u \in \mathscr{W}(\mathscr{A})$ называется *сильным решением задачи* (1), (2), если она удовлетворяет (1), (2).

Если оператор A является V-коэрцитивным, то в силу [7, гл. 9, теорема 1.24] оператор $-\mathscr{A}$ является генератором сжимающей полугруппы, допускающей аналитическое продолжение.

Лемма 1. *Пусть оператор A есть V-коэрцитивный оператор, тогда задача* (1), (2) *имеет единственное сильное решение тогда и только тогда, когда $\varphi \in [\mathscr{D}(\mathscr{A}),H]_{1/2}$. Более того, это решение представляется формулой*

$$u(t) = T_t\varphi + \int_0^t T_{t-s}f(s)\,ds,$$

где $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ – аналитическая полугруппа, порожденная оператором $-\mathscr{A}$.

Доказательство леммы опирается на следующую теорему.

Теорема 1 [8, гл. 1, теорема 3.7]. *Пусть оператор A является V-коэрцитивным. Пусть имеют место плотные и непрерывные вложения $V \subset [\mathscr{D}(\mathscr{A}); H]_{1/2}$ и $V \subset [\mathscr{D}(\mathscr{A}'); H]_{1/2}$. Тогда $V = [\mathscr{D}(\mathscr{A}); H]_{1/2}$.*

Применим теорему 1 к функционально-дифференциальным уравнениям параболического типа.

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с липшицевой границей. В качестве пространства H возьмем пространство $L_2(Q)$, за V примем пространство $\mathring{W}_2^1(Q)$, соответственно $V' = W_2^{-1}(Q)$. Рассмотрим ограниченный оператор $A_B\colon \mathring{W}_2^1(Q) \to W_2^{-1}(Q)$, действующий по формуле $A_B u = -\operatorname{div}(B \operatorname{grad} u)$, где $B\colon L_2^n(Q) \to L_2^n(Q)$ – ограниченный оператор. Введем обозначения

$$\mathring{W}_2^{1,n}(Q) = \prod_{k=1}^{n} \mathring{W}_2^1(Q), \qquad W_2^{1,n}(Q) = \prod_{k=1}^{n} W_2^1(Q).$$

Условие 1. *Оператор B ограниченно отображает пространство $\mathring{W}_2^{1,n}(Q)$ в пространство $W_2^{1,n}(Q)$.*

Условие 2. *Оператор A_B является $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивным.*

Введем неограниченный оператор $\mathscr{A}_{\mathscr{B}}: \mathscr{D}(\mathscr{A}_{\mathscr{B}}) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$, действующий по формуле

$$\mathscr{A}_{\mathscr{B}} u = A_B u, \qquad u \in \mathscr{D}(\mathscr{A}_{\mathscr{B}}) = \{u \in \mathring{W}_2^1(Q)\colon A_B u \in L_2(Q)\}.$$

Лемма 2. *Пусть оператор B удовлетворяет условиям 1 и 2, а оператор B^* удовлетворяет условию 1. Тогда*

$$[\mathscr{D}(\mathscr{A}_{\mathscr{B}}); L_2(Q)]_{1/2} = \mathring{W}_2^1(Q)$$

с точностью до эквивалентности норм.

Пусть теперь $Q \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$ или представляется в виде $Q = (0, d) \times D$, где $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ($\partial D \in C^\infty$, если $n \geqslant 3$). Введем ограниченные разностные операторы $R_{ij}\colon L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ и $R_{ijQ}\colon L_2(Q) \to L_2(Q)$ по формулам

$$R_{ij} u(x) = \sum_{h \in M} a_{ijh}(x) u(x + h), \qquad R_{ijQ} v = P_Q R_{ij} I_Q v,$$

где $M \subset \mathbb{R}^n$ – конечное множество векторов с целочисленными координатами; $a_{ijh} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ – комплекснозначные функции; I_Q – оператор продолжения функций из $L_2(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^n \setminus Q$; P_Q – оператор сужения функций из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q.

В качестве оператора B возьмем оператор $R\colon L_2^n(Q) \to L_2^n(Q)$, введенный по формуле

$$(Ru)_i = \sum_{j=1}^{n} R_{ijQ}(u)_j, \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Будем рассматривать дифференциально-разностный оператор A_R. Соответственно введем неограниченный оператор $\mathscr{A}_{\mathscr{R}}: \mathscr{D}(\mathscr{A}_{\mathscr{R}}) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$, действующий в пространстве распределений $D'(Q)$ по формуле $\mathscr{A}_{\mathscr{R}} u = A_R u$, где $u \in D(\mathscr{A}_{\mathscr{R}}) = \{u \in \mathring{W}_2^1(Q)\colon \mathscr{A}_{\mathscr{R}} u \in L_2(Q)\}$.

Следуя [1], введем некоторые вспомогательные обозначения. Обозначим через G аддитивную группу, порожденную множеством M, а через Q_r – открытые связные компоненты множества $Q \setminus \bigl(\bigcup_{h \in G} (\partial Q + h)\bigr)$.

Определение 3. Множества Q_r мы будем называть *подобластями*, а совокупность $\mathscr{R}$ всевозможных подобластей – *разбиением*.

Разбиение $\mathscr{R}$ распадается на непересекающиеся классы: подобласти $Q_{r_1}, Q_{r_2} \in \mathscr{R}$ принадлежат одному классу, если существует $h \in G$ такое, что $Q_{r_1} = Q_{r_2} + h$. Обозначим подобласти Q_r через Q_{sl}, где s – номер класса $(s = 1, 2, \dots)$, а l – порядковый номер подобласти в s-ом классе. В силу ограниченности Q каждый класс состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl}.

Введем множество

$$\mathscr{K} = \bigcup_{h_1, h_2 \in G} \{\overline{Q} \cap (\partial Q + h_1) \cap \overline{[(\partial Q + h_2) \setminus (\partial Q + h_1)]}\}.$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $\mu_{n-1}(\mathscr{K} \cap \partial Q) = 0$, где $\mu_{n-1}(\cdot)$ – $(n-1)$-мерная мера Лебега. Будем предполагать также, что для каждой подобласти Q_{sl} и каждого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $G_{sl} \subset Q_{sl}$ такое, что $\mu_n(Q_{sl} \setminus G_{sl}) < \varepsilon$ и $\mu_{n-1}(\partial G_{sl} \Delta \partial Q_{sl}) < \varepsilon$.

Для того чтобы сформулировать условие сильной эллиптичности, введем матрицы $R_{ij}(x)$ $(x \in \overline{Q}_{s1})$ порядка $N(s) \times N(S)$ с элементами $r_{kl}^{ijs}(x) = a_{ijh}(x + h_{sk})$ $(h = h_{sl} - h_{sk} \in M)$, $r_{kl}^{ijs}(x) = 0$ $(h_{sl} - h_{sk} \notin M)$, где h_{sk} определяется из условия $Q_{sk} = Q_{s1} + h_{sk}$. В силу [1, гл. 2, теорема 9.1] если оператор A_R сильно эллиптический, то для всех $s = 1, 2, \dots$, $x \in \overline{Q}_{s1}$ и $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$

$$\text{матрицы} \quad \sum_{ij} (R_{ijs}(x) + R_{ijs}^*(x))\xi_i \xi_j \quad \text{положительно определены.} \tag{3}$$

По теореме [1, гл. 2, теорема 9.3] условие (3) является также достаточным условием сильной эллиптичности оператора A_R для всюду плотного множества областей Q.

Рассмотрим параболическое дифференциально-разностное уравнение

$$u_t(x,t) - \mathscr{A}_{\mathscr{R}} u(x,t) = f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_T, \tag{4}$$

с краевым условием

$$u|_{\Gamma_T} = 0, \qquad (x,t) \in \Gamma_T, \tag{5}$$

и начальным условием

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad x \in Q, \tag{6}$$

где $\Omega_T = Q \times (0,T)$, $\Gamma_T = \partial Q \times (0,T)$, $0 < T < \infty$, $f \in L_2(\Omega_T)$, $\varphi \in L_2(Q)$.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* $\mathring{W}_2^1(Q)$-*корцитивности для оператора* $\mathscr{A}_{\mathscr{R}}$. *Тогда задача* (4)–(6) *имеет единственное сильное решение тогда и только тогда, когда* $\varphi \in \mathring{W}_2^1(Q)$.

Заметим, что в отличие от параболических дифференциальных уравнений гладкость сильных решений параболических дифференциально-разностных уравнений может нарушаться в цилиндре Ω_T, см. [6].

Введем теперь операторы растяжения и сжатия $T_{ij}: L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ и $T_{ijQ}: L_2(Q) \to L_2(Q)$ по формулам

$$T_{ij}u(x) = \sum_{l \in N} a_{ijl} u(q^{-l}x), \qquad T_{ijQ}v = P_Q T_{ij} I_Q v,$$

где $N \subset \mathbb{N}$ – конечное множество целых чисел; $a_{ijl} \in \mathbb{C}$; $q > 1$; операторы I_Q и P_Q такие же, как в определении разностных операторов.

Введем оператор $T\colon L_2^n(Q) \to L_2^n(Q)$ по формуле

$$(Tu)_i = \sum_{j=1}^{n} T_{ijQ} u_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad \text{где} \quad u = (u_1, \ldots, u_n)^T, \quad Tu = ((Tu)_1, \ldots, (Tu)_n)^T.$$

Возьмем в качестве оператора B оператор T и рассмотрим функционально-дифференциальный оператор A_T с растяжением и сжатием аргументов.

Обозначим $t_{ij}(\lambda) = \sum_{l \in N} a_{ijl} \lambda^l$. В силу [9, теорема 1] условие

$$\sum_{i,j=1}^{n} t_{ij}(\lambda) \xi_i \xi_j > 0, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \quad |\lambda| = q^{n/2}, \quad 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

является достаточным для $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивности оператора $\mathscr{A}_{\mathscr{T}}$. Если дополнительно предположить, что область Q удовлетворяет условию $\overline{Q} \subset qQ$, то в силу [9, теорема 2] условие (7) является и необходимым для $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивности оператора $\mathscr{A}_{\mathscr{T}}$.

Рассмотрим параболическое функционально-дифференциальное уравнение с растяжением и сжатием аргументов

$$u_t(x,t) - \mathscr{A}_{\mathscr{T}} u(x,t) = f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_T, \tag{8}$$

с краевым условием

$$u|_{\Gamma_T} = 0, \qquad (x,t) \in \Gamma_T, \tag{9}$$

и начальным условием

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad x \in Q. \tag{10}$$

Теорема 3. *Пусть для оператора T выполнено условие* (7). *Тогда задача* (8)–(10) *с оператором $\mathscr{A}_{\mathscr{T}}$ имеет единственное сильное решение тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathring{W}_2^1(Q)$.*

Автор выражает благодарность А. Л. Скубачевскому за постоянное внимание к работе и ряд ценных замечаний.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Skubachevskii A. L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1997. **2**. Скубачевский А. Л., Шамин Р. В. // Докл. РАН. 2001. Т. 379. №5. С. 595–598. **3**. Vorontsov M. A., Ricklin J. C., Carhart G. W. // Optical Engineering. 1995. V. 34. №11. P. 3229–3238. **4**. Скубачевский А. Л. // УМН. 1996. Т. 51. №1. С. 169–170. **5**. Skubachevskii A. L. // Nonlinear Analysis. 1998. V. 32. №2. P. 261–278. **6**. Скубачевский А. Л., Шамин Р. В. // Матем. заметки. 1999. Т. 66. №1. С. 145–153. **7**. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. **8**. Ashyralyev A., Sobolevskii P. E. Well-Posedness of Parabolic Difference Equations. Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1994. **9**. Россовский Л. Е. // Матем. заметки. 1996. Т. 59. №1. С. 103–113.

Московский государственный авиационный институт
(технический университет)
E-mail: bear@rfbr.ru

Поступило
14.09.2001