УДК 517.95

Р. В. Шамин

О пространствах начальных данных для дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве

Рассматриваются пространства начальных данных для дифференциальных уравнением в гильбертовом пространстве. Получены необходимые и достаточные условия сильной разрешимости параболических дифференциально-разностных уравнений и параболических функционально-дифференциальных уравнений с растяжением и сжатием аргументов.

Библиография: 21 название.

§ 1. Введение

При изучении задачи Коши для дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве H

$$u'(t) + \mathscr{A}u(t) = 0, \qquad t > 0, \tag{1.1}$$

$$u(0) = \varphi \in H, \tag{1.2}$$

где оператор $-\mathscr{A}\colon \mathscr{D}(\mathscr{A}) \subset H \to H$ является генератором аналитической полугруппы в пространстве H, возникает важный вопрос о существовании сильных решений задачи (1.1), (1.2) (см. [1], [2]). В случае, когда оператор $\mathscr{A}$ является неограниченным, хорошо известно, что не для всех $\varphi \in H$ существует сильное решение задачи (1.1), (1.2) (см. [1]). Множество всех $\varphi \in H$, для которых существует сильное решение, называется пространством начальных данных задачи (1.1), (1.2).

Изучение пространств начальных данных тесно связано с известной проблемой Като. В [3] Т. Като сформулировал следующую проблему: совпадает ли область определения $\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})$ с $\mathscr{D}((\mathscr{A}^*)^{1/2})$? В [4] показано, что, вообще говоря, ответ отрицательный. После этого проблема Като была переформулирована для эллиптических операторов с измеримыми коэффициентами (см. [5] и библиографию там же).

В настоящей работе выделен широкий класс коэрцитивных операторов $\mathscr{A}$, для которых имеет место равенство $\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) = \mathscr{D}((\mathscr{A}^*)^{1/2})$. Этот класс включает, в частности, дифференциально-разностные операторы, функционально-дифференциальные операторы с растяжением и сжатием аргументов и другие. Кстати, отметим, что функционально-дифференциальными уравнениями также занимались Т. Като и Дж. Б. Маклеод [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-01030) и фонда INTAS (грант № 97-30551).

Статья состоит из пяти параграфов. Во втором и третьем параграфах мы приводим постановку задачи и определяем пространство начальных данных. Основной результат об интерполяции областей определения коэрцитивных операторов получен в § 4. В § 5 мы применяем абстрактные результаты к параболическим задачам, в частности функционально-дифференциальным, и приводим различные примеры.

Параболические функционально-дифференциальные уравнения изучались в [7], [8]. В работе [9] показано, что область определения дифференциально-разностных операторов может содержать негладкие функции, не принадлежащие пространствам Соболева. С этим связаны большие трудности, возникающие при исследовании пространств начальных данных соответствующих параболических задач. При дополнительных условиях на область Q_T, в которой рассматриваются уравнения, и на область определения эллиптического дифференциально-разностного оператора пространство начальных данных для параболических дифференциально-разностных уравнений исследовано в [10]. Подход, предлагаемый в данной работе, позволяет получить описание пространств начальных данных для различных классов параболических функционально-дифференциальных уравнений без дополнительных ограничений на область Q_T и область определения $\mathscr{D}(\mathscr{A})$.

Краткое изложение основных результатов было дано в [11].

§ 2. Постановка задачи

Пусть V и H – сепарабельные гильбертовы пространства, и пусть V плотно и непрерывно вложено в H. Отождествим пространство H с его сопряженным, тогда мы получим $V \subset H \subset V'$, где каждое пространство плотно в последующем.

Рассмотрим непрерывный оператор $\mathrm{A}\colon V \to V'$.

Определение 2.1. Оператор A называется *V-коэрцитивным*, если для любого $v \in V$

$$\operatorname{Re}\langle \mathrm{A}v, v\rangle \geqslant c_1 \|v\|_V^2, \tag{2.1}$$

где $c_1 > 0$ не зависит от v.

В дальнейшем будем предполагать, что оператор A является V-коэрцитивным.

Замечание 2.1. В силу теоремы 9.1 [12; гл. 2] оператор A взаимно однозначно отображает V на V'.

Рассмотрим полуторалинейную форму $a[u,v]$ в H, определенную по формуле $a[u,v] = \langle \mathrm{A}u, v\rangle$, $\mathscr{D}(a) = V$. В силу (2.1) форма a является замкнутой секториальной формой в H. Действительно, для произвольного $u \in V$ мы имеем

$$|\operatorname{Im} a[u,u]| \leqslant |a[u,u]| \leqslant c_2 \|u\|_V^2.$$

Из последнего неравенства и из (2.1) следует, что числовая область значений $\Theta(a)$ лежит в секторе

$$\Theta(a) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : -\theta_1 < \arg\lambda < \theta_1\},$$

где $\theta_1 = \operatorname{arctg}(c_2/c_1) < \pi/2$.

В силу теоремы о представлении 2.1 [13; гл. 6] существует замкнутый, плотно определенный, секториальный оператор $\mathscr{A}\colon \mathscr{D}(\mathscr{A}) \subset H \to H$, порожденный формой a, такой, что $(\mathscr{A}u, v)_H = a[u,v]$, $u \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$, $v \in V$. Очевидно, $\mathscr{A}u = \mathrm{A}u$, когда $u \in \mathscr{D}(\mathscr{A}) = \{u \in V : \mathrm{A}u \in H\}$.

Будем рассматривать область определения $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ как гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u,v)_{\mathscr{D}(\mathscr{A})} = (\mathscr{A}u, \mathscr{A}v)_H + (u,v)_H. \tag{2.2}$$

Пусть Y – гильбертово пространство. Через $L_2(0,T;Y)$ обозначим гильбертово пространство измеримых функций со значениями в Y с конечной нормой

$$\|u\|_{L_2(0,T;Y)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_Y^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Введем гильбертово пространство $\mathscr{W}(\mathscr{A}) = \{w \in L_2(0,T;\mathscr{D}(\mathscr{A}))\colon w' \in L_2(0,T;H)\}$ со скалярным произведением

$$(u,v)_{\mathscr{W}(\mathscr{A})} = \int_0^T (u',v')_H\,dt + \int_0^T (\mathscr{A}u, \mathscr{A}v)_H\,dt + \int_0^T (u,v)_H\,dt,$$

где производные по t понимаются в смысле распределений со значениями в $L_2(0,T;H)$.

Замечание 2.2. В силу теоремы 3.1 [12; гл. 1] функция $w \in \mathscr{W}(\mathscr{A})$ имеет след $w\big|_{t=0} \in H$.

Будем рассматривать дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве H

$$u'(t) + \mathscr{A}u(t) = f(t), \qquad t \in (0,T), \tag{2.3}$$

с начальным условием

$$u\big|_{t=0} = \varphi, \tag{2.4}$$

где $0 < T < \infty$, $f \in L_2(0,T;H)$ и $\varphi \in H$.

Определение 2.2. Функция $u \in \mathscr{W}(\mathscr{A})$ называется *сильным решением задачи* (2.3), (2.4), если u удовлетворяет (2.3) при почти всех $t \in (0,T)$ и (2.4) в смысле замечания 2.2.

§ 3. Сильная разрешимость

Для исследования сильной разрешимости задачи (2.3), (2.4) воспользуемся методами теории полугрупп.

Определение 3.1. Пусть X – банахово пространство. Однопараметрическое семейство линейных ограниченных операторов $T_t\colon X \to X$, $t \geqslant 0$, называется *сильно непрерывной полугруппой* или *C_0-полугруппой*, если

1) $T_0 = I$;
2) $T_{t+s} = T_t T_s$, $t, s \geqslant 0$;
3) $\lim_{t \searrow 0} T_t x = x \ \ \forall\, x \in X$.

Определение 3.2. Полугруппа класса C_0 называется *сжимающей*, если $\|T_t\| \leqslant 1$, $t \geqslant 0$.

Определение 3.3. Линейный оператор $\mathrm{G}\colon X \to X$, определенный по формуле

$$\mathrm{G}x = \lim_{t\searrow 0} \frac{T_t x - x}{t}, \qquad x \in D(\mathrm{G}) = \left\{ x \in X : \lim_{t\searrow 0} \frac{T_t x - x}{t} \ \text{ существует} \right\},$$

называется *генератором сильно непрерывной полугруппы* $\{T_t\}$.

Обозначим $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2\}$, где $\varphi_1 < 0 < \varphi_2$.

Определение 3.4. Однопараметрическое семейство линейных ограниченных операторов $T_z\colon X \to X$, $z \in \Delta$, называется *аналитической полугруппой в* Δ, если

1) функция $z \mapsto T_z$ является аналитической в Δ;
2) $T_0 = I$ и $\lim_{z\to 0, z\in\Delta} T_z x = x$ для любого $x \in X$;
3) $T_{z_1+z_2} = T_{z_1}T_{z_2}$ для любых $z_1, z_2 \in \Delta$.

Полугруппа T_t, $t \geqslant 0$, называется *аналитической*, если ее можно продолжить до аналитической в некотором секторе Δ.

Лемма 3.1. *Пусть оператор* A *является* V*-коэрцитивным, тогда оператор* $-\mathscr{A}$ *является генератором аналитической полугруппы* $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$.

Доказательство. Оператор $\mathscr{A}$ является замкнутым, плотно определенным, секториальным оператором, поэтому в силу теоремы 1.24 [13; гл. 9] оператор $-\mathscr{A}$ является инфинитезимальным производящим оператором аналитической полугруппы T_t в H.

Предположим сначала, что $f = 0$. Хорошо известно, что если $\varphi \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$, то функция $u(t) = T_t\varphi$ является сильным решением задачи (2.3), (2.4), где $f = 0$ (см. [2]). Если оператор $\mathscr{A}$ является неограниченным, то не для всех $\varphi \in H$ будет существовать сильное решение задачи (2.3), (2.4). С другой стороны, условие принадлежности $\varphi \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$ не является необходимым условием сильной разрешимости.

Введем множество $\Phi = \{\varphi \in H$: существует сильное решение задачи (2.3), (2.4)$\}$. Ввиду линейности задачи множество Φ является линейным пространством.

Определение 3.5. Пространство Φ называется *пространством начальных данных для задачи* (2.3), (2.4).

Замечание 3.1. Если задача (2.3), (2.4) имеет сильное решение, то это решение единственно [2].

Имеют место следующие вложения: $\mathscr{D}(\mathscr{A}) \subset \Phi \subset H$. Для описания пространства начальных данных мы будем применять методы теории интерполяции гильбертовых пространств.

Рассмотрим гильбертово пространство H_1, плотно и непрерывно вложенное в H. Определим в пространстве H замкнутую, симметричную, положительную форму $t[u,v] = (u,v)_{H_1}$, $\mathscr{D}(t) = H_1$. Пусть T – ассоциированный с ней самосопряженный положительный оператор. Тогда оператор $\Lambda = T^{1/2}$ есть также положительный оператор в H и в силу теоремы 2.23 [13; гл. 6] область определения $\mathscr{D}(\Lambda) = \mathscr{D}(t) = H_1$, причем $t[u,v] = (\Lambda u, \Lambda v)_H$.

Определим теперь интерполяционные пространства $[H_1; H]_\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, следующим образом. Положим $[H_1; H]_\theta = \mathscr{D}(\Lambda^\theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, где дробная степень Λ^θ определена для положительного оператора Λ. Пространство $[H_1; H]_\theta$ есть гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u,v)_{[H_1;H]_\theta} = (\Lambda^\theta u, \Lambda^\theta v)_H + (u,v)_H.$$

Теорема 3.1. *Пусть оператор* A *есть* V*-коэрцитивный оператор, тогда задача* (2.3), (2.4) *имеет единственное сильное решение для любого* $f \in L_2(0,T;H)$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi \in [\mathscr{D}(\mathscr{A});H]_{1/2}$. *Более того, это решение представляется формулой*

$$u(t) = T_t\varphi + \int_0^t T_{t-s}f(s)\,ds, \tag{3.1}$$

где $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ – *аналитическая полугруппа, порожденная оператором* $-\mathscr{A}$.

Доказательство. Согласно лемме 3.1 оператор $-\mathscr{A}$ является генератором аналитической полугруппы. В силу теоремы 3.7 [1; гл. 1], которая утверждает, что функция $u_1(t) = \displaystyle\int_0^t T_{t-s}f(s)\,ds$ является сильным решением задачи (2.3), (2.4) при $\varphi = 0$, задача (2.3), (2.4) имеет единственное сильное решение тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$\int_0^T \|\mathscr{A}T_t\varphi\|_H^2\,dt < \infty.$$

При этом верна формула (3.1). В силу теоремы 1.14.5 [14; гл. 1] последнее неравенство эквивалентно включению $\varphi \in [\mathscr{D}(\mathscr{A});H]_{1/2}$.

Из теоремы 3.1 ясно, что для решения вопроса о сильной разрешимости задачи (2.3), (2.4) необходимо иметь описание пространства начальных данных $\Phi = [\mathscr{D}(\mathscr{A});H]_{1/2}$. В конкретных примерах часто возникают следующие трудности: во-первых, область определения $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ задана неконструктивно и может быть очень сложной, во-вторых, сама операция интерполирования конкретных пространств может оказаться затруднительной.

В следующем параграфе мы покажем, что при выполнении некоторых естественных условий можно показать, что пространство начальных данных Φ совпадает с пространством V.

§ 4. Интерполяция области определения коэрцитивного оператора

Рассмотрим в H форму $\overline{a}$, сопряженную к форме a. Форма $\overline{a}$ определяется по формуле $\overline{a}[u,v] = \langle \mathrm{A}^*u, v\rangle$, где A^* – сопряженный к A оператор. В силу теормы 2.5 [13; гл. 6] форма $\overline{a}$ порождает оператор $\mathscr{A}^*$, сопряженный к оператору $\mathscr{A}$. Область определения $\mathscr{D}(\mathscr{A}^*)$ будем рассматривать как гильбертово пространство со скалярным произведением, аналогичным (2.2).

Теорема 4.1. *Пусть оператор* A *является* V*-коэрцитивным. Предположим, что имеют место непрерывные вложения* $V \subset [\mathscr{D}(\mathscr{A});H]_{1/2}$ *и* $V \subset [\mathscr{D}(\mathscr{A}^*);H]_{1/2}$.

Тогда $V = [\mathscr{D}(\mathscr{A});H]_{1/2} = [\mathscr{D}(\mathscr{A}^*);H]_{1/2}$.

Доказательство. Для произвольного $u \in H$ форма $(\mathscr{A}w,u)_H$ определяет линейный непрерывный функционал f на $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ по формуле $\langle w,f\rangle = (\mathscr{A}w,u)_H$. Действительно,

$$\sup_{w\in\mathscr{D}(\mathscr{A})}\frac{|(\mathscr{A}w,u)_H|}{\|w\|_{\mathscr{D}(\mathscr{A})}} \leqslant \sup_{w\in\mathscr{D}(\mathscr{A})}\frac{\|\mathscr{A}w\|_H\|u\|_H}{(\|\mathscr{A}w\|_H^2+\|w\|_H^2)^{1/2}} \leqslant \|u\|_H.$$

Функционал f можно представить в виде $f = \mathrm{A}_0' u$, где оператор A_0' ограничен как оператор
$$\mathrm{A}_0' \colon H \to (\mathscr{D}(\mathscr{A}))', \tag{4.1}$$
поскольку $\|f\|_{(\mathscr{D}(\mathscr{A}))'} \leqslant \|u\|_H$.

Покажем, что $\mathscr{A}^* \subset \mathrm{A}_0'$, т.е. $\mathrm{A}_0' u = \mathscr{A}^* u$ для $u \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^*)$. Пусть $u \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^*)$ и $w \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$. Обозначим $\mathrm{A}_0' u = f_1$ и $\mathscr{A}^* u = f_2$. Тогда
$$\langle w, f_1 \rangle = (\mathscr{A} w, u)_H = (w, \mathscr{A}^* u)_H = \langle w, f_2 \rangle.$$
В силу произвольности $w \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$ мы имеем $\mathscr{A}^* u = \mathrm{A}_0' u$ в $(\mathscr{D}(\mathscr{A}))'$, но $\mathscr{A}^* u \in H$ и $H \subset (\mathscr{D}(\mathrm{A}^*))'$, следовательно, $\mathscr{A}^* u = \mathrm{A}_0' u \in H$ для $u \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^*)$. Поскольку оператор $\mathscr{A}^*$ ограниченно отображает $\mathscr{D}(\mathscr{A}^*)$ в H, то и оператор A_0' ограничен как оператор
$$\mathrm{A}_0' \colon \mathscr{D}(\mathscr{A}^*) \to H. \tag{4.2}$$
Из (4.1) и (4.2) в силу интерполяционной теоремы [12; гл. 1, теорема 5.1] оператор A_0' ограничен как оператор
$$\mathrm{A}_0' \colon [\mathscr{D}(\mathscr{A}^*); H]_{1/2} \to [H; (\mathscr{D}(\mathscr{A}))']_{1/2}.$$
Однако согласно теореме 6.2 о транспонировании [12; гл. 1] справедливо равенство $[H; (\mathscr{D}(\mathscr{A}))']_{1/2} = ([\mathscr{D}(\mathscr{A}); H]_{1/2})'$. Поэтому ограничен оператор
$$\mathrm{A}_0' \colon [\mathscr{D}(\mathscr{A}^*); H]_{1/2} \to ([\mathscr{D}(\mathscr{A}); H]_{1/2})'. \tag{4.3}$$
Покажем, что $\mathrm{A}_0' u = \mathrm{A}^* u$, если $u \in V$. Возьмем $u \in V$ и $w \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$. Пусть $\mathrm{A}_0' u = f_1$ и $\mathrm{A}^* u = f_2$. Тогда
$$\langle w, f_1 \rangle = (\mathscr{A} w, u)_H = \langle \mathrm{A} w, u \rangle = \langle w, \mathrm{A}^* u \rangle = \langle w, f_2 \rangle.$$
В силу произвольности $w \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$ мы получаем равенство $\mathrm{A}^* u = \mathrm{A}_0' u$ в $(\mathscr{D}(\mathscr{A}))'$, но $\mathrm{A}^* u \in V'$ и $V' \subset (\mathscr{D}(\mathscr{A}))'$. Следовательно, $\mathrm{A}^* u = \mathrm{A}_0' u \in V'$.

Возьмем произвольное $f \in V'$. Тогда $u = (\mathrm{A}^*)^{-1} f \in V$ и
$$\|u\|_V \leqslant c_1 \|f\|_{V'}, \tag{4.4}$$
где $c_1 > 0$ не зависит от f. По предположению теоремы $u \in [\mathscr{D}(\mathscr{A}^*); H]_{1/2}$ и
$$\|u\|_{[\mathscr{D}(\mathscr{A}^*); H]_{1/2}} \leqslant c_2 \|u\|_V, \tag{4.5}$$
где $c_2 > 0$ не зависит от f.

В силу (4.3) получаем $\mathrm{A}_0' u = f \in ([\mathscr{D}(\mathscr{A}); H]_{1/2})'$. Учитывая (4.4), (4.5), получаем
$$\|f\|_{([\mathscr{D}(\mathscr{A}); H]_{1/2})'} \leqslant c_3 \|u\|_{[\mathscr{D}(\mathscr{A}^*); H]_{1/2}} \leqslant c_3 c_2 \|u\|_V \leqslant c_3 c_2 c_1 \|f\|_{V'}.$$
В силу произвольности $f \in V'$ имеем, что $V' \subset ([\mathscr{D}(\mathscr{A}); H]_{1/2})'$. Переходя к сопряженным пространствам, получаем, что $[\mathscr{D}(\mathscr{A}); H]_{1/2} \subset V$. Вместе с предположением теоремы это означает, что $V = [\mathscr{D}(\mathscr{A}); H]_{1/2}$ с точностью до эквивалентности норм.

Равенство $V = [\mathscr{D}(\mathscr{A}^*); H]_{1/2}$ устанавливается аналогично.

Поскольку оператор $-\mathscr{A}$ является генератором аналитической полугруппы, то для оператора $\mathscr{A}$ можно определить дробные степени $\mathscr{A}^\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ (см. [3], [15]). Аналогично дробные степени определены и для $\mathscr{A}^*$.

Теорема 4.2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 4.1.
Тогда $\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) = \mathscr{D}((\mathscr{A}^*)^{1/2}) = V$.

Доказательство. Возьмем произвольное число $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. В силу теоремы 1.15.2 [14; гл. 1] оператор $\mathscr{A}^\alpha$ ограниченно и взаимно однозначно отображает пространство $[\mathscr{D}(\mathscr{A}); H]_{1/2}$ на пространство $[\mathscr{D}(\mathscr{A}); H]_{1/2-\alpha}$. Согласно теореме 4.1 имеем ограниченный оператор

$$\mathscr{A}^\alpha \colon V \to [\mathscr{D}(\mathscr{A}); H]_{1/2-\alpha}. \tag{4.6}$$

Для любого $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ введем оператор $K_\alpha = \Lambda^{1/2-\alpha}\mathscr{A}^\alpha$, где Λ – положительный оператор, с помощью которого определены интерполяционные пространства $[\mathscr{D}(\mathscr{A}); H]_\theta$. Из (4.6) следует, что операторы $K_\alpha \colon V \to H$ ограничены для $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Для произвольного фиксированного $\varphi \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$ можно перейти к пределу в H

$$\lim_{\alpha\to 1/2} K_\alpha\varphi = \lim_{\alpha\to 1/2} \Lambda^{1/2-\alpha}\mathscr{A}^\alpha\varphi = \lim_{\alpha\to 1/2} \Lambda^{1/2}\Lambda^{-\alpha}\mathscr{A}^{\alpha-1/2}\mathscr{A}^{1/2}\varphi = \mathscr{A}^{1/2}\varphi. \tag{4.7}$$

В (4.7) мы пользуемся теоремой 14.1 [15; гл. 4] об аналитичности семейства операторов $\mathscr{A}^{-t}$ при $t \geqslant 0$. Поскольку $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ плотно в V, то по теореме Банаха–Штейнгауза

$$\mathscr{A}^{1/2} \colon V \to H \ \text{ – ограниченный оператор.}$$

Следовательно, имеем $V \subset \mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2})$. Покажем, что имеет место и обратное вложение. Из (4.6) следует, что операторы $K_\alpha^{-1} = \mathscr{A}^{-\alpha}\Lambda^{-(1/2-\alpha)} \colon H \to V$ ограничены. Для любого $\varphi \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$ покажем, что

$$\lim_{\alpha\to 1/2} K_\alpha^{-1}\varphi = \mathscr{A}^{-1/2}\varphi \tag{4.8}$$

в $\mathscr{D}(\mathscr{A})$. Сначала покажем, что $\Lambda^{-(1/2-\alpha)}\varphi$ сходится к φ в $\mathscr{D}(\Lambda) = \mathscr{D}(\mathscr{A})$ при $\alpha \to \frac{1}{2}$. Имеем

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to 1/2} \|\Lambda^{-(1/2-\alpha)}\varphi - \varphi\|_{\mathscr{D}(\Lambda)} &= \lim_{\alpha\to 1/2} \|\Lambda(\Lambda^{-(1/2-\alpha)}\varphi - \varphi)\|_H \\ + \lim_{\alpha\to 1/2} \|\Lambda^{-(1/2-\alpha)}\varphi - \varphi\|_H &= \lim_{\alpha\to 1/2} \|\Lambda^{-(1/2-\alpha)}\psi_1 - \psi_1\|_H = 0,\end{aligned}$$

где $\Lambda\varphi = \psi_1 \in H$. Покажем теперь, что $\mathscr{A}^{-\alpha}$ сходится к $\mathscr{A}^{-1/2}$ в $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ при $\alpha \to \frac{1}{2}$. Имеем

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to 1/2} \|\mathscr{A}^{-\alpha}\varphi - \mathscr{A}^{-1/2}\varphi\|_{\mathscr{D}(\mathscr{A})} &= \lim_{\alpha\to 1/2} \|\mathscr{A}(\mathscr{A}^{-\alpha}\varphi - \mathscr{A}^{-1/2}\varphi)\|_H \\ + \lim_{\alpha\to 1/2} \|\mathscr{A}^{-\alpha}\varphi - \mathscr{A}^{-1/2}\varphi\|_H &= \lim_{\alpha\to 1/2} \|\mathscr{A}^{-\alpha}\psi_2 - \mathscr{A}^{-1/2}\psi_2\|_H = 0,\end{aligned}$$

где $\mathscr{A}\varphi = \psi_2 \in H$. Следовательно, имеет место (4.8). Поскольку $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ плотно в V, то по теореме Банаха–Штейнгауза оператор $\mathscr{A}^{-1/2} \colon H \to V$ ограничен и имеет место вложение $\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) \subset V$. Мы доказали, что $\mathscr{D}(\mathscr{A}^{1/2}) = V$. Поскольку оператор $\mathscr{A}^*$ обладает теми же свойствами, что и оператор $\mathscr{A}$, то аналогично мы имеем $\mathscr{D}((\mathscr{A}^*)^{1/2}) = V$.

Теорема 4.2 дает положительное решение проблемы Като для класса операторов, удовлетворяющих условиям теоремы 4.1. В следующем параграфе мы рассмотрим конкретные операторы из этого класса.

§ 5. Пространства начальных данных для параболических задач

В настоящем параграфе мы рассмотрим примеры различных параболических задач, для которых можно получить необходимые и достаточные условия сильной разрешимости, используя результаты предыдущего параграфа.

Пусть $\mathscr{A}$ – оператор, определенный в § 2 по V-коэрцитивному оператору A. Рассмотрим ограниченный оператор $C\colon V \to H$. Будем предполагать, что оператор C является ограниченным относительно оператора $\mathscr{A}$ с относительной границей 0, т.е. нижняя грань всех возможных констант b в неравенстве

$$\|Cu\|_H \leqslant a\|u\|_H + b\|\mathscr{A}u\|_H, \qquad u \in \mathscr{D}(\mathscr{A}),$$

равна нулю.

Введем замкнутый оператор $\mathscr{L}\colon \mathscr{D}(\mathscr{L}) \subset H \to H$, действующий по формуле $\mathscr{L}u = \mathscr{A}u + Cu$, $u \in \mathscr{D}(\mathscr{L}) = \mathscr{D}(\mathscr{A})$.

Рассмотрим эволюционное уравнение

$$u'(t) + \mathscr{L}u(t) = f(t), \qquad t \in (0,T), \tag{5.1}$$

с начальным условием

$$u(0) = \varphi. \tag{5.2}$$

Определение 5.1. Функция $u \in \mathscr{W}(\mathscr{L})$ называется *сильным решением задачи* (5.1), (5.2), если функция u удовлетворяет (5.1) при почти всех $t \in (0,T)$ и (5.2).

Результаты предыдущих параграфов для задачи (5.1), (5.2) позволяют доказать следующий результат.

Теорема 5.1. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 4.1.

Тогда для любой $f \in L_2(0,T;H)$ задача (5.1), (5.2) *имеет единственное сильное решение тогда и только тогда, когда $\varphi \in V$. Более того, это решение представляется формулой*

$$u(t) = T_t\varphi + \int_0^t T_{t-s}f(s)\,ds,$$

где $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ – аналитическая полугруппа, порожденная оператором $-\mathscr{L}$.

Доказательство. Сначала покажем, что оператор $-\mathscr{L}$ порождает аналитическую полугруппу. Согласно лемме 3.1 оператор $-\mathscr{A}$ является генератором аналитической полугруппы. В силу ограниченности оператора C относительно $\mathscr{A}$ с относительной границей 0 справедливо следствие 2.5 [13; гл. 9], которое утверждает, что в этом случае оператор $-\mathscr{L} = -(\mathscr{A} + C)$ является генератором аналитической полугруппы $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$, и имеет место оценка $\|T_t\| \leqslant Me^{\beta t}$.

Функция $u_1(t) = \displaystyle\int_0^t T_{t-s}f(s)\,ds$ является сильным решением задачи (5.1), (5.2) при $\varphi = 0$. Оператор $-\mathscr{L} - \beta I$ является генератором ограниченной полугруппы $\widetilde{T}_t$, связанной с T_t соотношением $\widetilde{T}_t = e^{-\beta t}T_t$. Функция $u_2(t) = e^{\beta t}\widetilde{T}_t\varphi$ будет сильным решением задачи (5.1), (5.2) при $f = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\int_0^T \|e^{\beta t}\widetilde{T}_t\varphi\|_H^2\,dt \leqslant c_3 \int_0^T \|\widetilde{T}_t\varphi\|_H^2\,dt < \infty.$$

В силу теоремы 1.14.5 [14; гл. 1] последнее неравенство эквивалентно включению $\varphi \in [\mathscr{D}(\mathscr{L} + \beta I); H]_{1/2}$. Но поскольку $\mathscr{D}(\mathscr{L} + \beta I) = \mathscr{D}(\mathscr{A})$, то в силу теоремы 4.1 имеем $[\mathscr{D}(\mathscr{L} + \beta I); H]_{1/2} = V$.

Следовательно, $u = u_1 + u_2$ будет сильным решением задачи (5.1), (5.2) тогда и только тогда, когда $\varphi \in V$.

Нам понадобится одна лемма о вложении интерполяционных пространств. Рассмотрим гильбертово пространство H_2, относительного которого будем предполагать, что вложение $H_2 \subset H$ плотно и непрерывно.

Лемма 5.1. *Предположим, что пространство H_2 непрерывно вложено в пространство H_1, тогда имеет место непрерывное вложение $[H_2; H]_{1/2} \subset [H_1; H]_{1/2}$.*

Доказательство. Для любых $t > 0$ и $\psi \in H$ определим функционал

$$K(t, \psi; H_1, H) = \inf_{\substack{\psi_0 + \psi_1 = \psi \\ \psi_0 \in H_1 \\ \psi_1 \in H}} (\|\psi_0\|_{H_1} + t\|\psi_1\|_H).$$

В силу теоремы 15.1 [12; гл. 1] имеет место равенство $[H_1; H]_{1/2} = \Bigl\{\psi \in H : \int_0^\infty t^{-2} K^2(t, \psi; H_1, H)\, dt < \infty\Bigr\}$. В силу вложения $H_2 \subset H_1$ имеет место оценка функции $K(t, \varphi; H_1, H)$ при $t > 0$

$$K(t, \varphi; H_1, H) \leqslant K(t, \varphi; H_2, H).$$

Поэтому если $t^{-1} K(t, \varphi; H_2, H) \in L_2(0, \infty)$, то и $t^{-1} K(t, \varphi; H_1, H) \in L_2(0, \infty)$. Следовательно, $[H_2; H]_{1/2} \subset [H_1; H]_{1/2}$.

Рассмотрим в качестве примера уравнение теплопроводности. Необходимые и достаточные условия сильной разрешимости первой смешанной задачи для такого уравнения изучались в работах [16]–[18].

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей ∂Q, удовлетворяющей условию Липшица. Через Q_T обозначим ограниченный цилиндр $Q_T = Q \times (0, T)$. Мы будем обозначать через $W_2^k(Q)$ пространство Соболева комплекснозначных функций из $L_2(Q)$, имеющих все обобщенные производные вплоть до k-го порядка из $L_2(Q)$, с нормой

$$\|u\|_{W_2^k(Q)} = \biggl(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_Q |\mathscr{D}^\alpha u(x)|^2\, dx\biggr)^{1/2}.$$

Через $\overset{\circ}{W}{}_2^k(Q)$ обозначим замыкание множества финитных бесконечно дифференцируемых функций $C_0^\infty(Q)$ в $W_2^k(Q)$, а через $W_2^{-k}(Q)$ обозначим пространство, сопряженное к $\overset{\circ}{W}{}_2^k(Q)$.

Рассмотрим первую смешанную задачу для уравнения теплопроводности

$$u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t), \qquad (x, t) \in Q_T, \tag{5.3}$$

с краевым условием
$$u\big|_{\partial Q\times(0,T)} = 0 \tag{5.4}$$
и начальным условием
$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad x \in Q. \tag{5.5}$$
В качестве пространства H возьмем пространство $L_2(Q)$, за пространство V примем пространство $\mathring{W}_2^1(Q)$, соответственно $V' = W_2^{-1}(Q)$. Оператор $\mathrm{A}\colon \mathring{W}_2^1(Q) \to W_2^{-1}(Q)$ определим по формуле $\mathrm{A}u = -\Delta u$, где производные понимаются в смысле обобщенные производных.

Оператор A будет $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивным. Действительно, для любой $u \in C_0^\infty(Q)$ имеем
$$\mathrm{Re}\langle \mathrm{A}u, u\rangle = -\,\mathrm{Re}(\Delta u, u)_{L_2(Q)} = \|\nabla u\|^2_{L_2(Q)} \geqslant c_1 \|u\|^2_{\mathring{W}_2^1(Q)}.$$

Задачу (5.3)– (5.5) можно переформулировать как задачу (5.1), (5.2).

Очевидно, $\mathring{W}_2^2(Q)$ непрерывно вложено в $\mathscr{D}(\mathscr{A})$, где $\mathscr{A}$ – неограниченный оператор, построенный по оператору A согласно § 2. В силу теоремы 11.6 [12; гл. 1] имеет место равенство
$$[\mathring{W}_2^2(Q); L_2(Q)]_{1/2} = \mathring{W}_2^1(Q). \tag{5.6}$$
Следовательно, согласно лемме 5.1 $\mathring{W}_2^1(Q) \subset [\mathscr{D}(\mathscr{A}); L_2(Q)]_{1/2}$ и это вложение непрерывно. В силу теоремы 5.1 мы имеем следующий результат. Задача (5.3)–(5.5) имеет единственное сильное решение тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathring{W}_2^1(Q)$.

Аналогично можно исследовать первую краевую задачу и для параболического уравнения с сильно эллиптическим оператором $2m$-го порядка.

Замечание 5.1. Теорема 11.6 [12; гл. 1] сформулирована для областей, имеющих гладкие границы. Однако используя теорему о продолжении функций для липшицевых областей [19; § 3, гл. 6, теорема 5], равенство (5.6) можно доказать и для областей, имеющих липшицевы границы.

Рассмотрим применение теоремы 5.1 для параболических функционально-дифференциальных уравнений. Как уже отмечалось, такие уравнения обладают рядом принципиально новых свойств, например, гладкость сильных решений может нарушаться внутри цилиндрической области. Тем не менее, оказывается, что необходимое и достаточное условие сильной разрешимости для параболических функционально-дифференциальных уравнений совпадает с критерием сильной разрешимости уравнения теплопроводности.

Рассмотрим ограниченный оператор $A_B\colon \mathring{W}_2^1(Q) \to W_2^{-1}(Q)$, действующий по формуле $A_B u = -\,\mathrm{div}(B\nabla u)$, где $B\colon L_2^n(Q) \to L_2^n(Q)$ – ограниченный оператор. Мы обозначили
$$L_2^n(Q) = \prod_{k=1}^n L_2(Q), \qquad \mathring{W}_2^{1,n}(Q) = \prod_{k=1}^n \mathring{W}_2^1(Q), \qquad W_2^{1,n}(Q) = \prod_{k=1}^n W_2^1(Q).$$
Относительно оператора B будем предполагать, что выполнены следующие условия.

Условие 5.1. Оператор B ограниченно отображает пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,n}(Q)$ в пространство $W_2^{1,n}(Q)$.

Условие 5.2. Оператор A_B является $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$-коэрцитивным.

Через $\mathscr{A}_B$ обозначим неограниченный оператор, построенный согласно § 2.

Рассмотрим первую смешанную задачу для параболического операторно-дифференциального уравнения

$$u_t(x,t) + \mathscr{A}_B u(x,t) + Cu(x,t) = f(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{5.7}$$

с краевым условием

$$u\big|_{\partial Q \times (0,T)} = 0 \tag{5.8}$$

и начальным условием

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad x \in Q. \tag{5.9}$$

Задачу (5.7)–(5.9) можно рассматривать как задачу (5.1), (5.2).

Заметим, что из выполнения условия 5.2 для оператора B следует выполнение условия 5.2 и для оператора B^*. Сопряженным к оператору $\mathscr{A}_B$ будет оператор $\mathscr{A}_{\mathscr{B}^*}$. Действительно, для любых $u, v \in C_0^\infty(Q)$

$$(\mathscr{A}_B u, v)_{L_2(Q)} = -(B\nabla u, \nabla v)_{L_2^n(Q)} = (u, \mathscr{A}_{\mathscr{B}^*} v)_{L_2(Q)}. \tag{5.10}$$

Поскольку $C_0^\infty(Q)$ всюду плотно в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$, тождества (5.10) справедливы для любых $u \in \mathscr{D}(\mathscr{A}_B)$, $v \in \mathscr{D}(\mathscr{A}_{\mathscr{B}^*})$. Следовательно, $\mathscr{A}_{\mathscr{B}^*} \subset (\mathscr{A}_B)^*$ и $\mathscr{A}_B \subset (\mathscr{A}_{\mathscr{B}^*})^*$. Однако в силу $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$-коэрцитивности операторов $\mathscr{A}_B$ и $\mathscr{A}_{\mathscr{B}^*}$ $0 \notin \sigma(\mathscr{A}_B) \cup \sigma(\mathscr{A}_{\mathscr{B}^*})$, тогда по лемме 13 [20; § 6, гл. 14] о сопряженных операторах $(\mathscr{A}_B)^* = \mathscr{A}_{\mathscr{B}^*}$.

Поскольку оператор B ограниченно отображает $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,n}(Q)$ в $W_2^{1,n}(Q)$, то имеет место непрерывное вложение $\overset{\circ}{W}{}_2^2(Q) \subset \mathscr{D}(\mathscr{A}_B)$. Соответственно $\overset{\circ}{W}{}_2^2(Q)$ непрерывно вложено в $\mathscr{D}(\mathscr{A}_{\mathscr{B}^*})$. В силу леммы 5.1 имеют место непрерывные вложения $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q) \subset [\mathscr{D}(\mathscr{A}_B); L_2(Q)]_{1/2}$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q) \subset [\mathscr{D}(\mathscr{A}_{\mathscr{B}^*}); L_2(Q)]_{1/2}$.

Таким образом, для задачи (5.7)–(5.9) выполнены условия теоремы 5.1, и мы имеем следующий результат.

Теорема 5.2. *Пусть оператор B удовлетворяет условиям* 5.1 *и* 5.2, *а оператор B^* удовлетворяет условию* 5.1.

Тогда для любого $f \in L_2(0,T; L_2(Q))$ задача (5.7)–(5.9) *имеет единственное сильное решение тогда и только тогда, когда $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$.*

Приведем примеры операторов B, для которых выполнены условия 5.1, 5.2. Покажем, что для важных классов функционально-дифференциальных уравнений применима теорема 5.2.

Сделаем дополнительные предположения относительно области Q. Пусть граница области Q представляется следующим объединением:

$$\partial Q = \bigcup_i \overline{M_i}, \qquad i = 1, \dots, N_0,$$

где M_i – $(n-1)$-мерные многообразия класса C^∞, которые являются открытыми и связными в топологии ∂Q. Пусть в окрестности каждой точки $g \in \partial Q \setminus \bigcup_i M_i$ область Q диффеоморфна n-мерному двугранному углу, если $n \geqslant 3$, и плоскому углу, если $n = 2$.

Введем ограниченные разностные операторы $R_{ij}\colon L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ и $R_{ijQ}\colon L_2(Q) \to L_2(Q)$ по формулам

$$R_{ij}u(x) = \sum_{h \in M} a_{ijh}(x)u(x+h), \qquad R_{ijQ}v = P_Q R_{ij} I_Q v.$$

Здесь $M \subset \mathbb{R}^n$ – конечное множество векторов с целочисленными координатами, $a_{ijh} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ – комплекснозначные функции, I_Q – оператор продолжения функций из $L_2(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^n \setminus Q$, P_Q – оператор сужения функций из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q.

В качестве оператора B возьмем оператор $R\colon L_2^n(Q) \to L_2^n(Q)$, введенный по формуле

$$(Ru)_i = \sum_{j=1}^{n} R_{ijQ} u_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $u = (u_1, \ldots, u_n)^T$.

Будем рассматривать дифференциально-разностный оператор A_R, заданный формулой $A_R = -\operatorname{div}(R\nabla u)$. Соответственно введем неограниченный оператор $\mathscr{A}_R\colon \mathscr{D}(\mathscr{A}_R) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$.

Для того чтобы сформулировать условия $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивности оператора A_R, следуя [9], введем некоторые вспомогательные обозначения. Обозначим через G аддитивную абелеву группу, порожденную множеством M, а через Q_r – открытые связные компоненты множества $Q \setminus \left(\bigcup_{h \in G}(\partial Q + h)\right)$.

Определение 5.2. Множества Q_r мы будем называть *подобластями*, а совокупность $\mathscr{R}$ всевозможных подобластей Q_r – *разбиением множества* Q.

Разбиение $\mathscr{R}$ естественным образом распадается на непересекающиеся классы: будем считать, что подобласти $Q_{r_1}, Q_{r_2} \in \mathscr{R}$ принадлежат одному классу, если существует $h \in G$ такое, что $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$. Обозначим подобласти Q_r через Q_{sl}, где s – номер класса, $s = 1, 2, \ldots$, а l – порядковый номер подобласти в s-ом классе. В силу ограниченности области Q каждый класс состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl} и $N(s) \leqslant ([\operatorname{diam} Q] + 1)^n$.

Для того чтобы сформулировать необходимые условия $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивности в алгебраической форме, мы введем матрицы $R_{ijs}(x)$, $x \in \overline{Q}_{s1}$, порядка $N(s) \times N(s)$ с элементами

$$r_{kl}^{ijs}(x) = \begin{cases} a_{ijh}(x + h_{sk}), & h = h_{sl} - h_{sk} \in M; \\ 0, & h_{sl} - h_{sk} \notin M. \end{cases}$$

В силу теоремы 9.1 [9; гл. 2] если оператор A_R является $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивным, то для всех $s = 1, 2, \ldots$, $x \in \overline{Q}_{s1}$ и $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ матрицы

$$\sum_{i,j=1}^{n} (R_{ijs}(x) + R_{ijs}^*(x))\xi_i \xi_j$$

положительно определены.

Пусть теперь $x \in \overline{Q}_{s1}$ – произвольная точка. Рассмотрим все точки $x^l \in \overline{Q}$ такие, что $x^l - x \in G$. Поскольку область Q ограниченная, множество $\{x^l\}$ состоит из конечного числа точек $I = I(s,x)$, $I \geqslant N(s)$. Перенумеруем точки x^l так, что $x^l = x + h_{sl}$ для $l = 1, \dots, N = N(s)$, $x^1 = x$, где h_{sl} удовлетворяет условию $Q_{sl} = Q_{s1} + h_{sl}$.

Введем матрицы $A_{ijs}(x)$ порядка $I \times I$ с элементами $a_{lk}^{ijs}(x)$ по формуле

$$a_{lk}^{ijs}(x) = \begin{cases} a_{ijh}(x^l), & h = x^k - x^l \in M; \\ 0, & x^k - x^l \notin M. \end{cases}$$

В силу теоремы 9.2 [9; гл. 2] если для всех $s = 1, 2, \dots$, $x \in \overline{Q}_{s1}$ и $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ матрицы

$$\sum_{i,j=1}^{n} (A_{ijs}(x) + A_{ijs}^*(x))\xi_i \xi_j$$

положительно определены, то оператор A_R является $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивным.

Очевидно, если $I = N$, то матрица $R_{ijs}(x)$ равна матрице $A_{ijs}(x)$. Если $N < I$, то матрица $R_{ijs}(x)$ получается из матрицы A_{ijs} вычеркиванием последних $I - N$ строк и столбцов.

Рассмотрим параболическое дифференциально-разностное уравнение

$$u_t(x,t) + \mathscr{A}_R u(x,t) + Cu(x,t) = f(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{5.11}$$

с краевым условием

$$u\big|_{\partial Q \times (0,T)} = 0 \tag{5.12}$$

и начальным условием

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad x \in Q. \tag{5.13}$$

Теорема 5.3. *Пусть выполнено условие $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивности для оператора $\mathscr{A}_R$.*

Тогда задача (5.11)–(5.13) *имеет единственное сильное решение тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathring{W}_2^1(Q)$.*

Доказательство. Покажем, что оператор R удовлетворяет условиям 5.1 и 5.2. Действительно, в силу леммы 8.13 [9; гл. 2] оператор R непрерывно отображает $\mathring{W}_2^{1,n}(Q)$ в $W_2^{1,n}(Q)$. А по условию теоремы оператор $\mathscr{A}_R$ является $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивным. Аналогично, R^* удовлетворяет условию 5.1.

Таким образом, к задаче (5.11)–(5.13) применима теорема 5.2.

Пример 5.1. Рассмотрим задачу (5.11)–(5.13), предполагая, что $Q = \left(0, \frac{4}{3}\right) \times \left(0, \frac{4}{3}\right)$, $A_R = -\operatorname{div}(R_Q \nabla u)$, $R_Q = P_Q R I_Q$, $Ru(x) = u(x) + au(x_1 + 1, x_2 + 1) + au(x_1 - 1, x_2 - 1)$, $0 < a < 1$. Очевидно, разбиение $\mathscr{R}$ области Q состоит из двух классов подобластей:

1) $Q_{11} = \left(0, \frac{1}{3}\right) \times \left(0, \frac{1}{3}\right)$, $Q_{12} = \left(1, \frac{4}{3}\right) \times \left(1, \frac{4}{3}\right)$;
2) $Q_{21} = Q \setminus (\overline{Q}_{11} \cup \overline{Q}_{12})$.

Введем множество $\mathscr{K} \subset \partial Q$, состоящее из из четырех точек:

$$g^1 = \left(\frac{1}{3}, 0\right), \quad g^2 = \left(\frac{4}{3}, 1\right), \quad g^3 = \left(0, \frac{1}{3}\right), \quad g^4 = \left(1, \frac{4}{3}\right).$$

Матрицы $A_s(x)$, $x \in \overline{Q}_{s1}$, $s = 1, 2$, имеют вид

$$A_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}, \qquad x \in \overline{Q}_{11},$$

$$A_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}, \quad x \in \overline{Q}_{21} \cap \mathscr{K}, \qquad A_2(x) = (1), \quad x \in \overline{Q}_{21} \setminus \mathscr{K}.$$

Таким образом, матрицы $A_s(x)(\xi_1^2 + \xi_2^2)$, $x \in \overline{Q}_{s1}$, $s = 1, 2$, положительно определены. Следовательно, оператор A_R является $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$-коэрцитивным.

Согласно теореме 5.3 задача (5.11)–(5.13) имеет единственное сильное решение тогда и только тогда, когда $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$.

Однако в [9] доказано, что $\mathscr{D}(\mathscr{A}_R) \not\subset W_2^2(Q)$. Используя этот результат, в работе [7] было показано, что имеет место нарушение гладкости сильных решений на границе соседних подобластей $Q_{s_1 l_1} \times (0, T)$, $Q_{s_2 l_2} \times (0, T)$ и вблизи множества $\mathscr{K} \times (0, T)$. В этом примере область определения $\mathscr{D}(\mathscr{A}_R)$ не может быть описана в терминах пространств Соболева. Тем не менее, используя подходы, преложенные в настоящей статье, мы имеем описание пространства начальных данных в виде пространства Соболева.

Введем теперь операторы растяжения и сжатия $T_{ij}\colon L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ и $T_{ijQ}\colon L_2(Q) \to L_2(Q)$ по формулам

$$T_{ij}u(x) = \sum_{l \in N} a_{ijl} u(q^{-l}x), \qquad T_{ijQ}v = P_Q T_{ij} I_Q v,$$

где $N \subset \mathbb{N}$ – конечное множество натуральных чисел, $a_{ijl} \in \mathbb{C}$, $q > 1$, операторы I_Q и P_Q такие же, как в определении разностных операторов.

Введем оператор $\mathrm{T}\colon L_2^n(Q) \to L_2^n(Q)$ по формуле

$$(\mathrm{T}u)_i = \sum_{j=1}^{n} T_{ijQ} u_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $u = (u_1, \ldots, u_n)^T$. Возьмем в качестве оператора B оператор T и рассмотрим функционально-дифференциальный оператор A_{T} с растяжением и сжатием аргументов. Соответственно введем неограниченный оператор $\mathscr{A}_{\mathrm{T}}\colon \mathscr{D}(\mathscr{A}_{\mathrm{T}}) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$.

Обозначим $t_{ij}(\lambda) = \sum_{l \in N} a_{ijl} \lambda^l$. В силу теоремы 1 [21] условие

$$\sum_{i,j=1}^{n} t_{ij}(\lambda) \xi_i \xi_j > 0, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \quad |\lambda| = q^{n/2}, \quad 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{5.14}$$

является достаточным для $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$-коэрцитивности оператора $\mathscr{A}_{\mathrm{T}}$. Если дополнительно предположить, что область Q удовлетворяет условию

$$\overline{Q} \subset qQ,$$

то в силу теоремы 2 [21] условие (5.14) является и необходимым для $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивности оператора $\mathscr{A}_{\mathrm{T}}$.

Рассмотрим параболическое функционально-дифференциальное уравнение с растяжением и сжатием аргументов

$$u_t(x,t) + \mathscr{A}_{\mathrm{T}} u(x,t) + Cu(x,t) = f(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{5.15}$$

с краевым условием

$$u\big|_{\partial Q\times(0,T)} = 0 \tag{5.16}$$

и начальным условием

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad x \in Q. \tag{5.17}$$

Теорема 5.4. *Пусть для оператора* T *выполнено условие* (5.14). *Тогда задача* (5.15)–(5.17) *имеет единственное сильное решение тогда и только тогда, когда* $\varphi \in \mathring{W}_2^1(Q)$.

Доказательство. Покажем, что операторы T, T* удовлетворяют условию 5.1. Легко видеть, что операторы T, T* ограниченно отображают $\mathring{W}_2^{1,n}(Q)$ в $W_2^{1,n}(Q)$. По условию теоремы $\mathscr{A}_{\mathrm{T}}$ и $\mathscr{A}_{\mathrm{T}^*}$ будут $\mathring{W}_2^1(Q)$-коэрцитивными.

Таким образом, к задаче (5.15)–(5.17) применима теорема 5.2.

Пример 5.2. Пусть $Q = \{|x| < 1\} \subset \mathbb{R}^n$. Рассмотрим задачу

$$u_t(x,t) - \Delta\big(u(x,t) + a_1 u(q^{-1}x,t)\big) = f(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{5.18}$$

$$u\big|_{\partial Q\times(0,T)} = 0, \tag{5.19}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad x \in Q, \tag{5.20}$$

где $q > 1$, $a_1 \in \mathbb{R}$.

В данном примере условие (5.14) означает $|a_1| \leqslant q^{1-n/2}$. По теореме 5.4 задача (5.18)–(5.20) имеет сильное решение тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathring{W}_2^1(Q)$.

Автор выражает глубокую благодарность А. Л. Скубачевскому за постоянное внимание к работе и ряд важных замечаний.

Список литературы

1. *Ashyralyev A., Sobolevskii P. E.* Well-posedness of parabolic difference equations. Basel: Birkhäuser, 1994.
2. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. New York: Springer-Verlag, 1983.
3. *Kato T.* Fractional powers of dissipative operators // J. Math. Soc. Japan. 1961. V. 13. P. 246–274.

4. *McIntosh A.* On the comparability of $A^{1/2}$ and $A^{*1/2}$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. V. 32. P. 430–434.
5. *Auscher P., Hofmann S., McIntosh A., Tchamitchian P.* The Kato square root problem for higher order elliptic operators and systems on $\mathbb{R}^n$ // J. Evolution Equations. 2001. V. 1. №4. P. 361–385.
6. *Kato T., McLeod J.B.* The functional differential equation // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. V. 77. P. 891–937.
7. *Скубачевский А.Л., Шамин Р.В.* Первая смешанная задача для параболического дифференциально-разностного уравнения // Матем. заметки. 1999. Т. 66. №1. С. 145–153.
8. *Skubachevskii A.L., Shamin R.V.* The mixed boundary value problem for parabolic differential-difference equation // Funct. Differ. Equ. 2001. V. 8. №3–4. P. 407–424.
9. *Skubachevskii A.L.* Elliptic functional differential equations and applications. Basel: Birkhäuser, 1997.
10. *Скубачевский А.Л., Шамин Р.В.* Параболические дифференциально-разностные уравнения второго порядка // Докл. РАН. 2001. Т. 379. №5. С. 735–738.
11. *Шамин Р.В.* Пространства начальных данных для параболических функционально-дифференциальных уравнений // Матем. заметки. 2002. Т. 71. №4. С. 636–640.
12. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
13. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
14. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
15. *Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.
16. *Слободецкий Л.Н.* Обобщенные пространства С.Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных // Уч. записки Лен. пед. инст. им. А.И. Герцена. 1958. Т. 197. С. 54–112.
17. *Ладыженская О.А.* О нестационарных операторных уравнениях и их приложениях к линейным задачам математической физики // Матем. сб. 1958. Т. 45. №2. С. 123–158.
18. *Ладыженская О.А.* О решении нестационарных операторных уравнений // Матем. сб. 1956. Т. 39. №4. С. 491–524.
19. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
20. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Т. 2. М.: Мир, 1966.
21. *Россовский Л.Е.* Коэрцитивность функционально-дифференциальных уравнений // Матем. заметки. 1996. Т. 59. №1. С. 103–113.

Московский авиационный институт
E-mail: `rwsh@yandex.ru`

Поступила в редакцию
10.02.2003