Современная математика. Фундаментальные направления. Том 21 (2007). С. 133–148

УДК 517.957

К ВОПРОСУ ОБ ОЦЕНКЕ ВРЕМЕНИ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ КОШИ—КОВАЛЕВСКОЙ С ПРИМЕРАМИ ИЗ ГИДРОДИНАМИКИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

© 2007 г. **Р. В. ШАМИН**

СОДЕРЖАНИЕ

Аннотация. Рассмотрены уравнения, описывающие нестационарное течение идеальной жидкости со свободной поверхностью. Изучаются уравнения в конформных переменных. Для этих уравнений доказана корректная разрешимость в шкале пространств аналитических функций. Построены и обоснованы конструктивные методы, позволяющие оценивать время существования решений этих уравнений. Приведен пример вычислительного эксперимента с использованием рассмотренных методов.

1. Введение

При изучении нелинейных дифференциальных уравнений типичной является ситуация, когда теоремы существования гарантируют существование решений лишь на достаточно малом интервале времени. При этом максимальный временной интервал, на котором существует решение (в выбранном классе решений), обычно зависит от начального условия. Настоящая работа посвящена методам оценки времени существования решений нелинейных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве. Рассматриваются уравнения, которые могут быть включены в теорию под обобщающим названием теории Коши—Ковалевской. Такие задачи рассматривались в работах многих авторов, например, [9, 10, 17, 18].

В отличие от методов оценки времени существования решений в зависимости от класса начальных условий, мы оцениваем время существования индивидуальных решений при фиксированных начальных условиях. Подобные результаты являются конструктивными, т. е. оценка времени существования получается «вплоть до числа». Сначала в работе рассматриваются абстрактные уравнения, для которых приводятся обоснованные методы оценки времени существования решений. Во второй части работы абстрактные результаты применяются к задачам гидродинамики со свободной поверхностью. Мы рассматриваем проблему оценки времени существования поверхностных волн идеальной жидкости. Для этого случая проблема оценки времени существования решений является весьма трудной и малоизученной. Отметим, что в этом случае вопрос об определении класса начальных условий, гарантирующих существование глобального решения, сформулирован как одна из важнейших нерешенных проблем, см. [16]. Поэтому наш подход в исследовании индивидуальных решений является оправданным в теории поверхностных волн на воде.

Результаты настоящей работы были успешно использованы в океанологических исследованиях в Институте океанологии им. П. П. Ширшова РАН и в Институте теоретической физики им.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта НШ-7550.2006.2, гранта РФФИ № 04-05-64784, и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Математические методы в нелинейной динамике».

Л. Д. Ландау РАН (В. Е. Захаров, А. И. Дьяченко, С. И. Бадулин, Р. В. Шамин). В частности, путем прямого численного моделирования было рассмотрено возникновение интересного (и сложного) океанологического явления «волны-убийцы». Таким образом было показано, что «волны-убийцы» могут возникать вследствие нелинейных эффектов в уравнениях, описывающих течение идеальной жидкости со свободной поверхностью. Методы, изложенные в этой работе, придают доказательный характер проведенным численным экспериментам.

2. Абстрактный случай: дифференциальные уравнения в шкалах гильбертовых пространств

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_k\}$. Для элемента $u \in H$ через $\{u_k\}$ будем обозначать коэффициенты Фурье по базису $\{e_k\}$: $u = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k e_k$, $u_k = (u, e_k)_H$. Построим шкалу гильбертовых пространств H_s, $s \geqslant 0$, следующим образом:

$$H_s = \{u \in H : \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^2 e^{2sk} < \infty\}.$$

Скалярное произведение в H_s введем по формуле

$$(u, v)_{H_s} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \overline{v}_k e^{2sk}.$$

Мы будем рассматривать функции числового аргумента со значениями в H_s. Введем соответствующие пространства. Через $C^k([0,T]; H_s)$, $0 < T < \infty$, обозначим пространство k-раз непрерывно дифференцируемых на $[0,T]$ функций со значениями в H_s; норма в этом пространстве имеет вид

$$\|u\|_{C^k([0,T];H_s)} = \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{H_s} + \sum_{m=1}^{k} \max_{t\in[0,T]} \|u^{(m)}(t)\|_{H_s}.$$

Через $C^0([0,T]; H_s) = C([0,T]; H_s)$ будем обозначать непрерывные на $[0,T]$ функции. Очевидно, что функцию $u \in C([0,T]; H_s)$ можно представить в виде $u(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(t) e_k$, где $u_k(t)$ суть непрерывные на $[0,T]$ числовые функции.

Введем, вообще говоря, нелинейный оператор $\mathbf{A}$, определенный в шкале H_s. Будем предполагать, что оператор $A : H_s \to H_{s'}$ непрерывен при любых $s > s' > 0$.

Рассмотрим абстрактную задачу Коши

$$\dot{u}(t) = \mathbf{A}u(t), \quad t > 0 \tag{2.1}$$

$$u(0) = \varphi \in H. \tag{2.2}$$

Определение 2.1. Функция $u \in C^1([0,T]; H_s)$, $s > 0$, называется *s-решением*.

Для того, чтобы гарантировать существование s-решения, необходимо накладывать дополнительные условия на оператор $\mathbf{A}$. Заметим, что необходимым условием для существования s-решения является условие $\varphi \in H_s$. Задача (2.1)–(2.2) в шкалах пространств рассматривалась в работах многих авторов: Т. Нисиды, Л. Ниренберга, Ф. Трева, Л. В. Овсянникова и др., см. [9, 10, 17, 18]. В частности, были получены условия, гарантирующие существование решений на достаточно малом временном интервале.

Введем числовую функцию на элементах пространства H_s следующим образом:

$$\nu(u) = \limsup_{k\to\infty} \frac{\ln|u_k|}{k},$$

допуская значение $\nu = -\infty$. В случае, когда существует такой номер K, что $u_k = 0$ при $k > K$, полагаем $\nu(u) = -\infty$.

Лемма 2.1. *Пусть $u \in H_s$, тогда $\nu(u) \leqslant -s$.*

Доказательство. Последовательность u_k можно представить в виде $u_k = \alpha_k e^{-sk}$, где последовательность $\{\alpha_k\} \in l_2$. Действительно, $\|\alpha_k\|^2_{l_2} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|^2 e^{2sk} = \|u\|^2_{H_s}$. Поскольку $\ln|u_k| = \ln|\alpha_k| - sk$ и при достаточно больших k имеем $\ln|\alpha_k| < 0$, получается, что

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\ln|u_k|}{k} = \limsup_{k\to\infty} \frac{\ln|\alpha_k|}{k} - s \leqslant -s.$$

□

Введем еще функцию $\nu_k(u)$, заданную на элементах H_s:

$$\nu_k(u) = \begin{cases} \dfrac{\ln|u_k|}{k}, & u_k \neq 0, \\ -\infty, & u_k = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим последовательность $\{u^N\} \subset H_s$, где $u^N = \sum\limits_{k=1}^{N} u_k^N e_k$.

Теорема 2.1. *Пусть* $\lim\limits_{N\to\infty} \|u^N - u\|_{H_s} = 0$ *для* $u \in H_s$. *Предположим, что* $\nu(u) = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\ln|u_k|}{k} = -s \neq -\infty$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует константа* $C_\varepsilon > 0$, *не зависящая от* N *и* k, *такая, что*

$$|\nu_k(u^N) - \nu(u)| \leqslant C_\varepsilon \frac{1}{k} + \varepsilon, \quad k \leqslant N,$$

исключая k, N, *для которых* $u_k^N = 0$.

Доказательство. Поскольку $\nu(u) = -s$, существуют $C_0 > 0$ и такая числовая последовательность $\gamma_k > 0$, что $\lim\limits_{k\to\infty} (\gamma_k)^{-1} e^{ks} |u_k| = C_0$. При этом для любого $\varepsilon > 0$ существует $C_{1\varepsilon}$ такая, что

$$\gamma_k \leqslant C_{1\varepsilon} e^{-\varepsilon k}. \tag{2.3}$$

Следовательно, $|u_k| = (C_0 + \delta_k)\gamma_k e^{-ks}$, где $\delta_k \to 0$ при $k \to \infty$. Из сходимости u^N к u в H_s следует, что $u_k^N \to u_k$ при $N \to \infty$. Поэтому для фиксированного k существует последовательность $\Delta_k^N \to 0$, $N \to \infty$, такая, что

$$|u_k^N| = (C_0 + \delta_k + \Delta_k^N)\gamma_k e^{-sk}.$$

Пусть число $N_0 > 0$ выбрано так, что при $N > N_0$, $k > N_0$ имеем $|\delta_k + \Delta_k^N| < C_0/2$. Учитывая (2.3), получаем оценку

$$|\nu_k(u^N) - \nu(u)| = \left| \frac{\ln|C_0 + \delta_k + \Delta_k^N|}{k} + \frac{\ln\gamma_k}{k} - s + s \right| \leqslant \frac{|\ln(2C_0)|}{k} + \frac{|\ln C_{1\varepsilon}|}{k} + \varepsilon \leqslant C_\varepsilon \frac{1}{k} + \varepsilon.$$

□

3. Абстрактный случай: конечномерная аппроксимация

Конечномерные аппроксимации u^N, рассмотренные в предыдущем разделе, могут быть получены проекционным методом. Опишем этот метод. Пусть H^N — N-мерное пространство, порожденное элементами $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$. Через $P_N : H \to H^N$ будем обозначать проектор на H^N, $P_N\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k e_k$. В дальнейшем без оговорок будем подразумевать вложение $H^N \subset H$.

Для фиксированного $N > 0$ будем рассматривать задачу относительно $u^N(t) = \sum\limits_{k=1}^{N} u_k^N(t) e_k$:

$$\dot{u}^N(t) = P_N \mathbf{A} u^N(t), \quad t > 0, \tag{3.1}$$

$$u^N(0) = P_N \varphi. \tag{3.2}$$

Поскольку функция u^N полностью определяется набором числовых функций $(u_1^N(t),\dots,u_N^N(t))^T$, задачу (3.1)–(3.2) можно переписать в виде системы N-го порядка для обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $(u_1^N(t),\dots,u_N^N(t))^T$. Введем множество $M_{q,s}^N\subset\mathbb{C}^N$ при $q>0$, $s>0$ следующим образом:

$$M_{q,s}^N=\{(u_1^N,\dots,u_N^N)\in\mathbb{C}^N:|u_k^N|\leqslant qe^{-sk}\}.$$

Будем предполагать, что q и s_1 выбраны так, что

$$P_N\varphi\in\operatorname{int}M_{q,s_1}^N,$$

где через $\operatorname{int}M_{q,s_1}^N$ обозначена внутренность множества M_{q,s_1}^N.

Рассмотрим отображение $F^N:\mathbb{C}^N\to\mathbb{C}^N$, задаваемое правой частью уравнения (3.1):

$$\bigl(F^N((\alpha_1,\dots,\alpha_N)^T)\bigr)_i=\left(\mathbf{A}\left(\sum_{k=1}^N\alpha_ke_k\right),e_i\right)_H.$$

Будем предполагать, что функция F^N удовлетворяет условию Липшица на множестве M_{q,s_1}^N. Это предположение гарантирует существование единственного решения задачи Коши (3.1)–(3.2) в M_{q,s_1}^N. Введем величину

$$T_M^N=\sup\{T\geqslant 0:\text{на }[0,T]\text{ существует решение задачи (3.1)–(3.2) в }M_{q,s_1}^N\}.$$

Рассмотрим верхний предел $\limsup\limits_{N\to\infty}T_M^N=T_M$.

Теорема 3.1. *Предположим, что задача* (2.1)–(2.2) *не может иметь более одного s-решения. Пусть $T_M>0$, $T'<T_M$, тогда существует такая подпоследовательность N_l, что $T_M^{N_l}>T'$ и для любого $s_2>0$, $s_2<s_1$ выполнено*

$$\lim_{l\to\infty}\|u^{N_l}-u\|_{C([0,T'];H_{s_2})}=0,\tag{3.3}$$

где u есть s_2-решение задачи (2.1)–(2.2).

Доказательство. Для сокращения введем обозначения $H=H_0$, $V=H_{s_2}$,

$$M=\Bigl\{u=\sum_{k=1}^\infty u_ke_k:|u_k|\leqslant qe^{-s_1k}\Bigr\}.$$

Легко видеть, что множество M компактно в V, а пространство V компактно вложено в H.

По определению верхнего предела существует такая подпоследовательность N_l, что $T_M^{N_l}>T'$.

Рассмотрим функционал невязки

$$J(u)=\|u(t)-\varphi-\int\limits_0^t\mathbf{A}u(s)ds\|_{C([0,T_k'];H)}$$

на пространстве $C([0,T'];V)$. Очевидно, что этот функционал непрерывный. Поскольку u^{N_l} являются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений, то $u^{N_l}\in C^1([0,T'];M)$. В силу обобщенной теоремы Арцела [5, теорема 7, гл. 2] последовательность $\{u^{N_l}\}$ предкомпактна в $C([0,T'];V)$. Следовательно, существует подпоследовательность u^{N_m}, сходящаяся в $C([0,T'];V)$ к u^*. В силу непрерывности функционала J имеем $\lim\limits_{m\to\infty}J(u^{N_m})=J(u^*)$. Покажем, что $J(u^*)=0$.

Действительно, имеем

$$J(u^{N_m}) = \max_{t\in[0,T']} \left\| u^{N_m}(t) - \varphi - \int\limits_0^t \mathbf{A}u^{N_m}(s)ds \right\|_H =$$
$$= \left\| P_{N_m}\varphi - \varphi + \int\limits_0^t P_{N_m}\mathbf{A}u^{N_m}(s)ds - \int\limits_0^t \mathbf{A}u^{N_m}(s)ds \right\|_H \leqslant$$
$$\leqslant \max_{t\in[0,T']} \|P_{N_m}\varphi - \varphi\|_H + \max_{t\in[0,T']} \left\| \int\limits_0^t (P_{N_m}\mathbf{A}u^{N_m}(s) - \mathbf{A}u^{N_m}(s))ds \right\|_H .$$

Оценим второе слагаемое:

$$\max_{t\in[0,T']} \left\| \int\limits_0^t (P_{N_m}\mathbf{A}u^{N_m}(s) - \mathbf{A}u^{N_m}(s))ds \right\|_H =$$
$$= \max_{t\in[0,T']} \left\| \int\limits_0^t ((I - P_{N_m})\mathbf{A}u^{N_m}(s) \right\|_H \leqslant \max_{t\in[0,T_k']} \int\limits_0^t \|(I - P_{N_m})\mathbf{A}u^{N_m}(s)\|_H ds.$$

Поскольку $\mathbf{A}u^{N_m}(t)$ принадлежит ограниченному множеству в V, то равномерно по $t \in [0,T']$ имеем $\lim\limits_{m\to\infty} \|(I - P_{N_m})\mathbf{A}u^{N_m}(t)\|_H = 0$. Следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} J(u^{N_m}) = 0.$$

При каждом $t \in [0,T']$ имеем $u^{N_m}(t) \in M$. Ввиду замкнутости M получаем, что $u^*(t) \in M$ при всех $t \in [0,T_k']$. Таким образом, u^* является s_2-решением задачи (2.1)–(2.2) на $[0,T']$.

Покажем теперь, что $\{u^{N_l}\}$ сходится к u^*. В самом деле, имеем $\liminf\limits_{l\to\infty} \|u^{N_l} - u^*\|_{C([0,T'];H)} \geqslant 0$. Пусть $\limsup\limits_{l\to\infty} \|u^{N_l} - u^*\|_{C([0,T'];H)} = \lim\limits_{p\to\infty} \|u^{N_p} - u^*\|_{C([0,T'];H)}$. В силу компактности вложения $C^1([0,T'];V) \subset C([0,T'];H)$ можем считать, что u^{N_p} сходится к некоторой функции v^*. Рассуждая подобно изложенному выше, получаем, что v^* является s_2-решением задачи (2.1)–(2.2). Однако согласно предположению задача (2.1)–(2.2) имеет единственное решение, следовательно, $v^* = u^*$. Поэтому $\lim\limits_{l\to\infty} \|u^{N_l} - u^*\|_{C([0,T'];H)} = 0$. □

4. Гидродинамика идеальной жидкости со свободной поверхностью

В этом разделе мы будем рассматривать уравнения, описывающие течение идеальной жидкости со свободной поверхностью. Задачи нестационарного течения идеальной жидкости со свободной поверхностью исследовались многими авторами. Первые результаты о существовании аналитических решений в этих задачах получены в работе [6]. Существование решений конечной гладкости доказано в [7, 8]. Корректность задачи в трехмерном случае исследовалась в [20]. Для вязкой жидкости локальная разрешимость установлена в работе [12].

Рядом авторов изучались численные методы для моделирования задач, описывающих нестационарное течение идеальной жидкости со свободной поверхностью, см., например, [1, 3, 11, 13, 15, 19].

Эти уравнения могут быть записаны в виде задачи (2.1)–(2.2). При этом проблема получения оценок времени существования решений, описывающих поверхностные волны, является принципиально важной в задачах океанологии. Покажем, как методы, изложенные в предыдущих параграфах, могут быть использованы в задачах об оценке времени существования поверхностных волн.

Пусть идеальная несжимаемая жидкость занимает область в плоскости (x, y), ограниченную свободной поверхностью

$$-\infty < y \leqslant \eta(x,t),$$
$$-\infty < x < \infty, \quad t > 0.$$

Считая движение жидкости потенциальным, мы имеем

$$v(x,y,t) = \nabla\Phi(x,y,t),$$

где $v(x,y,t)$ — двумерное поле скоростей, $\Phi(x,y,t)$ — потенциал. Всюду в данной работе мы считаем, что операторы градиента, дивергенции и Лапласа применяются лишь по пространственным переменным x и y. Из условия несжимаемости жидкости $\operatorname{div} v = 0$ следует, что потенциал скоростей удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\Phi(x,y,t) = 0. \tag{4.1}$$

С уравнением (4.1) связываются следующие граничные и начальные условия:

$$(\eta_t + \Phi_x\eta_x - \Phi_y)|_{y=\eta(x,t)} = 0, \tag{4.2}$$
$$(\Phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + gy)|_{y=\eta(x,t)} = 0, \tag{4.3}$$
$$\Phi_y|_{y=-\infty} = 0, \tag{4.4}$$
$$\eta|_{t=0} = \eta_0(x), \tag{4.5}$$
$$\Phi|_{t=0} = \Phi_0(x,y). \tag{4.6}$$

Здесь g — ускорение поля тяжести.

Задача (4.1)–(4.6) является достаточно сложной для непосредственного изучения. Следуя работе [4], перепишем задачу (4.1)–(4.6) в других обозначениях. Совершим конформное отображение области, занимаемой жидкостью в плоскости (x, y), в полупространство переменных (u, v),

$$-\infty < u < \infty, \quad -\infty < v < 0.$$

После преобразования поверхность $\eta(x,t)$ может быть представлена в параметрическом виде

$$x = u + \tilde{x}(u,t), \quad y = y(u,t),$$

где $\tilde{x}(u,t)$ и $y(u,t)$ связаны оператором Гильберта

$$y = \mathrm{H}[\tilde{x}], \quad \tilde{x} = -\mathrm{H}[y],$$

$$\mathrm{H}[f](u) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{v.\,p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u')du'}{u'-u}.$$

Удобно ввести величину $\Psi(x,t) = \Phi(x,\eta(x,t),t)$, которая является значением потенциала на свободной поверхности. Как показано в работе [4], переменные $y(u,t)$ и $\Psi(u,t)$ полностью описывают движение жидкости и подчиняются следующей системе интегродифференциальных уравнений:

$$y_t = y_u \mathrm{H}\left[\frac{\mathrm{H}[\Psi_u]}{J}\right] - x_u\frac{\mathrm{H}[\Psi_u]}{J}, \tag{4.7}$$

$$\Psi_t = -\frac{\Psi_u^2 + (\mathrm{H}[\Psi_u])^2}{2J} + \mathrm{H}\left[\frac{\mathrm{H}[\Psi_u]}{J}\right]\Psi_u + \frac{\mathrm{H}[\Psi_u]}{J}\mathrm{H}[\Psi_u] - gy, \tag{4.8}$$

где $J = x_u^2 + y_u^2$ — якобиан отображения.

Уравнения (4.7)–(4.8) являются разрешенными относительно производных по времени. Однако для численного моделирования уравнения (4.7)–(4.8) оказались неудобны. В частности, при численных расчетах возникает явление неустойчивости, которое препятствует расчетам на больших временных интервалах. Стараясь избежать операции деления в уравнениях (4.7)–(4.8) и привести их к более простой форме, А. И. Дьяченко нашел другую эквивалентную форму для других переменных. Рассмотрим эти переменные.

Образуем пару комплексных функций $z(w,t) = x(w,t) + iy(w,t)$ и (на действительной оси) $\Phi(u,t) = \Psi(u,t) + i\mathrm{H}[\Psi(u,t)]$, где $w = u + iv$. Введем новые переменные $R(w,t)$ и $V(w,t)$ по следующим формулам:

$$R(w,t) = \frac{1}{z_w}, \qquad V(w,t) = i\frac{\Phi_w}{z_w}.$$

Функции R и V аналитические в нижней полуплоскости и удовлетворяют следующим условиям:

$$R(w,t) \to 1, \quad |w| \to \infty, \quad \operatorname{Im} w \leqslant 0,$$
$$V(w,t) \to 0, \quad |w| \to \infty, \quad \operatorname{Im} w \leqslant 0.$$

Как показано в работе [21], функции R и V удовлетворяют следующей системе интегродифференциальных уравнений:

$$R_t = i(UR_w - U_w R), \tag{4.9}$$
$$V_t = i(UV_w - B_w R) + g(R-1), \tag{4.10}$$

где $U = \mathrm{P}(V\overline{R} + \overline{V}R)$, $B = \mathrm{P}(V\overline{V})$, $\mathrm{P} = (\mathrm{I} + i\mathrm{H})/2$ — интегральный оператор. Эти уравнения называются уравнениями Дьяченко. Разрешимость этих уравнений рассматривалась в работе [14].

Замечание 4.1. С точки зрения численных методов уравнения (4.9)–(4.10) выгодно рассматривать с условиями периодичности по переменной u.

Уравнения в переменных R и V оказались значительно более подходящими для доказательства разрешимости и численного моделирования. При проведении расчетов практически не возникает неустойчивость, что делает возможным численный счет с огромной точностью на больших временах.

Пусть Q — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Мы будем обозначать через $H^k(Q)$ пространство Соболева комплекснозначных функций из $L_2(Q)$, имеющих все обобщенные производные вплоть до k-го порядка из $L_2(Q)$, с нормой

$$\|f\|_{H^k(Q)} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_Q |\mathcal{D}^\alpha f(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Пусть $Q_s = \{w = u + iv : 0 < u < 2\pi, |v| < s\}$ — область в $\mathbb{C}$, $0 < s < \infty$. Введем шкалу банаховых пространств E_s следующим образом. Пространство E_s состоит из сужений на Q_s функций аналитических в полосе $\{w \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} w| < s\}$, 2π-периодических по переменной u и вещественных при $v = 0$, с конечной нормой

$$\|f\|_{E_s} = \left(\sup_{|v| \leqslant s} \|f\|^2_{H^1(0,2\pi)} \right)^{1/2},$$

где $H^1(0,2\pi)$ — пространство Соболева первого порядка. Для сокращения письма норму в пространстве E_s будем обозначать через $\|\cdot\|_s$.

Лемма 4.1. *Пусть $f, g \in E_s$, тогда $fg \in E_s$ и $\|fg\|_s \leqslant c\|f\|_s\|g\|_s$.*

Доказательство. Оценим норму $\|fg\|_s$:

$$\|fg\|_s^2 \leqslant \sup_{|v| \leqslant s} (\|fg\|^2_{L_2(0,2\pi)} + \|f'g\|^2_{L_2(0,2\pi)} + \|fg'\|^2_{L_2(0,2\pi)}).$$

Оценим отдельные слагаемые с помощью теоремы вложения Соболева:

$$\sup_{|v| \leqslant s} \|fg\|^2_{L_2(0,2\pi)} \leqslant c_1 \sup_{|v| \leqslant s} \|f\|^2_{L_2(0,2\pi)} \|g\|^2_{C[0,2\pi]} \leqslant c_2 \|f\|_s^2 \|g\|_s^2.$$

Остальные слагаемые оцениваются аналогично:

$$\sup_{|v| \leqslant s} \|f'g\|^2_{L_2(0,2\pi)} \leqslant c_3 \sup_{|v| \leqslant s} \|f'\|^2_{L_2(0,2\pi)} \|g\|^2_{C[0,2\pi]} \leqslant c_4 \|f\|_s^2 \|g\|_s^2,$$
$$\sup_{|v| \leqslant s} \|fg'\|^2_{L_2(0,2\pi)} \leqslant c_5 \sup_{|v| \leqslant s} \|f\|^2_{C[0,2\pi]} \|g'\|^2_{L_2(0,2\pi)} \leqslant c_6 \|f\|_s^2 \|g\|_s^2.$$

$\square$

Лемма 4.2. *Пусть f_1, f_2, g_1, g_2 принадлежат шару радиуса $M > 0$ в пространстве E_s. Тогда имеет место неравенство*

$$\|f_1g_1 - f_2g_2\|_s \leqslant c(M)(\|f_1 - f_2\|_s + \|g_1 - g_2\|_s).$$

Доказательство. В силу леммы 4.1 имеем

$$\|f_1g_1 - f_2g_2\|_s = \|f_1g_1 - f_1g_2 + f_1g_2 - f_2g_2\|_s \leqslant$$
$$\leqslant \|f_1(g_1 - g_2)\|_s + \|(f_1 - f_2)g_2\|_s \leqslant c(M)(\|f_1 - f_2\|_s + \|g_1 - g_2\|_s).$$

$\square$

Для периодических функций оператор Гильберта вводится следующим образом:

$$\mathrm{H}[f] = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{v.\,p.}\int_0^{2\pi} f(u')\operatorname{ctg}(u' - u)du.$$

Лемма 4.3. *Оператор Гильберта непрерывен в пространстве E_s и $\|\mathrm{H}f\|_s = \|f\|_s$ для любой $f \in E_s$.*

Доказательство. Пусть $f \in E_s$, тогда для нормы $\|f\|_s$ имеем следующее представление:

$$\|f\|_s^2 = \sup_{|v|\leqslant s}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}(1 + k^2)^2 e^{2kv}|f_k|^2\right),$$

где f_k суть коэффициенты Фурье. Поскольку $\mathrm{H}[e^{iku}] = i\operatorname{sign}(k)e^{iku}$,

$$\|\mathrm{H}f\|_s^2 = \sup_{|v|\leqslant s}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}(1 + k^2)^2 e^{2kv}| - i\operatorname{sign}(k)f_k|^2\right) = \|f\|_s^2.$$

$\square$

Перепишем уравнения (4.9)–(4.10) в вещественной форме при $v = 0$. Пусть $R = R_1 + iR_2$, $V = V_1 + iV_2$, тогда имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{R}_1 = U_1'R_2 + U_2'R_1 - U_1R_2' - U_2R_1', \\ \dot{R}_2 = U_1R_1' + U_2R_2' - U_1'R_1 + U_2'R_2, \\ \dot{V}_1 = B_1'R_2 + B_2'R_1 - U_1V_2' - U_2V_1' + g(R_1 - 1), \\ \dot{V}_2 = U_1V_1' + U_2V_2' - B_1'R_1 + B_2'R_2 + gR_2, \end{cases} \tag{4.11}$$

где $U_1 = R_1V_1 + R_2V_2$, $U_2 = \mathrm{H}[R_1V_1 + R_2V_2]$, $B_1 = (V_1^2 + V_2^2)/2$, $B_2 = \mathrm{H}[V_1^2 + V_2^2]/2$.

Запишем уравнения (4.11) в векторной форме. Через E_s^4 обозначим пространство $\prod_{l=1}^{4} E_s$; введем отображение $F : E_s^4 \to E_s^4$, порожденное правыми частями уравнений (4.11). Введем обозначение $W = [R_1, R_2, V_1, V_2]^T$. Система примет вид

$$\dot{W} = F(W). \tag{4.12}$$

Уравнение (4.12) будем рассматривать с начальным условием

$$W(0) = W_0 \tag{4.13}$$

и краевыми условиями

$$R_{10} = 1,\ R_{10} = 0,\ V_{10} = 0,\ V_{20} = 0, \tag{4.14}$$

где $R_{10}, R_{20}, V_{10}, V_{20}$ суть коэффициенты Фурье функций R_1, R_2, V_1, V_2, соответствующие $k = 0$.

Определение 4.1. Функция $W(t) = [R_1(t), R_2(t), V_1(t), V_2(t)]^T$, аналитическая на $[0, T)$ со значениями в E_s^4 $(s > 0)$, называется *аналитическим решением* задачи (4.12)–(4.14), если W удовлетворяет (4.12)–(4.14).

Теорема 4.1. *Пусть* $W_0 \in E^4_{s_1}$ *и* W_0 *удовлетворяет условиям* (4.14), *тогда для любого* $s_2 \in (0, s_1)$ *существует* $T = T(s_2)$ *такое, что при* $t \in (0, T)$ *существует единственное аналитическое решение задачи* (4.12)–(4.14).

Доказательство. Выберем произвольные s, s' такие, что $0 < s' < s < s_1$. Пусть $W_1, W_2 \in E^4_s$ и $\|W_1\|_{E^4_s} < M$, $\|W_2\|_{E^4_s} < M$. Покажем, что оператор F удовлетворяет условию

$$\|F(W_1) - F(W_2)\|_{E^4_{s'}} \leqslant c(M) \frac{\|W_1 - W_2\|_{E^4_s}}{s - s'}. \tag{4.15}$$

Функция $f \in E_s$ может быть представлена рядом Фурье $f(w) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikw}$, тогда $f'(w) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} (ik) f_k e^{ikw}$. Учитывая, что функция $\operatorname{Im} f = 0$ при $v = 0$, имеем $f_k = \overline{f}_{-k}$. Из оценки $k^2 e^{2|k|s} \leqslant \dfrac{e^2}{(s - s')^2} e^{2|k|s}$ следует, что

$$\|f'\|_{s'} \leqslant c_1 \frac{\|f\|_s}{s - s'}.$$

Отсюда и из лемм 4.2, 4.3 следует (4.15).

Рассмотрим вспомогательную задачу относительно W_a в E^4_s:

$$\dot{W}_a = F(W_a + W_0), \tag{4.16}$$

$$W_a(0) = 0. \tag{4.17}$$

В силу оценки (4.15) к задаче (4.16), (4.17) применима теорема Ниренберга—Нисиды [9, с. 220]. По этой теореме существует $T = T(s_2) > 0$ такое, что при $t \in (0, T)$ существует единственное аналитическое решение задачи (4.16), (4.17). Тогда функция $W(t) = W_a(t) + W_0$ будет аналитическим решением задачи (4.12), (4.13). Нужно показать, что функция W удовлетворяет (4.14). По условию теоремы начальное значение W_0 удовлетворяет (4.14). С другой стороны, пусть $A \in E^4_s$, тогда для функции $B = F(A) \in E^4_{s'}$ имеет место

$$B_{10} = 0, \ B_{20} = 0, \ B_{30} = 0, \ B_{40} = 0.$$

Следовательно, функция W удовлетворяет условию (4.14). □

В приложениях при численном моделировании удобно работать с решениями на вещественной оси в пространствах Соболева. Пусть $\Omega = (0, 2\pi) \times (0, T)$, $0 < T < \infty$ — прямоугольник в $\mathbb{R}^2$. Следствием теоремы 4.1 является следующая теорема.

Теорема 4.2. *Пусть* $[R_1, R_2, V_1, V_2]^T$ — *аналитическое решение при* $t \in [0, T]$, *тогда при* $v = 0$ $R_1, R_2, V_1, V_2 \in H^k(\Omega)$ *для любого* $k \geqslant 1$.

5. Оценка времени существования поверхностных волн идеальной жидкости

В настоящем разделе мы покажем, как методы разделов 2, 3 могут быть применены к задаче (4.9)–(4.10). Но вначале отметим, что результаты раздела 4 могут быть перенесены на случай шкалы гильбертовых пространств.

Введем пространство $\widetilde{E}_s$, состоящее из функций аналитических в области $\Pi = \{w = u + iv \in \mathbb{C} : 0 < u < 2\pi, |v| < s\}$ и 2π-периодических по переменной u, со скалярным произведением

$$(f, g)_{\widetilde{E}_s} = \int\limits_{\Pi} f(w) \overline{g(w)} dw.$$

Пространство $\widetilde{E}_s$ является гильбертовым пространством (см. [2, теорема 1, гл. 1]). Очевидно, что вложение $E_s \subset \widetilde{E}_s$ является непрерывным. С другой стороны, для любых $s' > 0$ и $s > s'$ имеет место непрерывное вложение $\widetilde{E}_s \subset E_{s'}$.

Для построения конструктивной оценки времени существования бесконечномерной системы необходимо аппроксимировать эту систему конечномерной системой. Мы будем использовать аппроксимационную схему, описанную в разделе 3. Опишем эту численную схему применительно к задаче (4.9)–(4.10). Пусть $N \geqslant 1$ — фиксированное число размерности приближенной задачи. Приближенные решения будем искать в виде

$$R^N(u,t) = 1 + \sum_{k=1}^{N} r_k(t)e^{-iku}, \quad V^N(u,t) = \sum_{k=1}^{N} v_k(t)e^{-iku}. \tag{5.1}$$

Использование представления в виде конечных сумм Фурье (5.1) имеет существенные преимущества. Действительно, пусть $f = \sum\limits_{k=1}^{N} f_k e^{-iku}$, тогда $f_u = \sum\limits_{k=1}^{N} (-ik) f_k e^{-iku}$. Еще более эффективно вычисляется оператор P. Для $g = \sum\limits_{k=-N}^{N} g_k e^{-iku}$ имеем $\mathrm{P}[g] = g_0/2 + \sum\limits_{k=1}^{N} g_k e^{-iku}$. Введем бинарную операцию «$*$», которая является замкнутой для множества функций вида (5.1). Пусть $A = \sum\limits_{k=-N}^{N} a_k e^{-iku}$, $B = \sum\limits_{k=-N}^{N} b_k e^{-iku}$. Тогда для $C = AB$ имеем $C = \sum\limits_{k=-2N}^{2N} c_k e^{-iku}$. Операцию «$*$» введем следующим образом: $A * B = \sum\limits_{k=-N}^{N} c_k e^{-iku}$, где c_k — коэффициенты Фурье функции C.

Приближенные решения R^N и V^N будем искать как решения системы уравнений

$$\begin{cases} R_t^N = i(U^N * R_u^N - U_u^N * R^N), \\ V_t^N = i(U^N * V_u^N - B_u^N * R^N) + g(R^N - 1), \end{cases} \tag{5.2}$$

где $U^N = \mathrm{P}(V^N * \overline{R}^N + \overline{V}^N * R^N)$, $B = \mathrm{P}(V^N * \overline{V}^N)$.

Система (5.2) решается явным методом Рунге—Кутта 4-го порядка точности по переменной t.

Будем предполагать, что начальные функции R_0 и V_0 принадлежат пространству $E^4_{s_1}$, $s_1 > 0$.

Наряду с вычислением функций R^N, V^N, будем еще вычислять числовую функцию $\nu_k^N(t)$, определенную следующим образом:

$$\nu_k^N(t) = \min\left\{ \frac{|\ln|R_k^N(t)||}{k}, \frac{|\ln|V_k^N(t)||}{k} \right\}, \quad k \leqslant N,$$

предполагая, без ограничения общности, $R_k^N(t) \neq 0$, $V_k^N(t) \neq 0$.

Функция ν_k^N аппроксимирует функцию $\nu(t)$, построенную по точным решениям системы (4.9)–(4.10) — функциям $R(t)$ и $V(t)$:

$$\nu(t) = \min\left\{ \limsup_{k\to\infty} \frac{|\ln|R_k||}{k}, \limsup_{k\to\infty} \frac{|\ln|V_k||}{k} \right\}.$$

Функция ν имеет естественную интерпретацию. Функции R, V являются аналитическими в нижней комплексной полуплоскости и имеют особенности в верхней полуплоскости. Значение функции ν определяет расстояние от особенностей до вещественной оси. До тех пор, пока $\nu > s_0$ и $s_1 > s_0 > 0$, система (4.9)–(4.10) имеет s_0-решение. Функция ν оценивается через функцию ν_k^N с помощью теоремы 2.1. Функцию $\nu_k^N(t)$ будем называть оценочной функцией.

6. Численный эксперимент

Для проверки и апробации нашего метода повторим численный эксперимент, описанный в работе [21]. Начальное условие в этом эксперименте было выбрано следующим образом:

$$R_0(u) = 1 + a\exp(-iu), \quad V_0(u) = -ia\sqrt{g}\exp(-iu),$$

где $a = 0.28$, $g = 10$. В работе [21] утверждается, что обрушение этой волны происходит за время порядка $t = 2.0$. Проверим это утверждение с помощью нашего метода. На рис. 6.1 приведен профиль начальной волны. Будем производить расчет приближенных решений, вычисляя оценочную функцию. На рис. 6.2, 6.3, 6.4 приведены соответственно профиль, спектр и оценочная функция при $t = 0.5$.

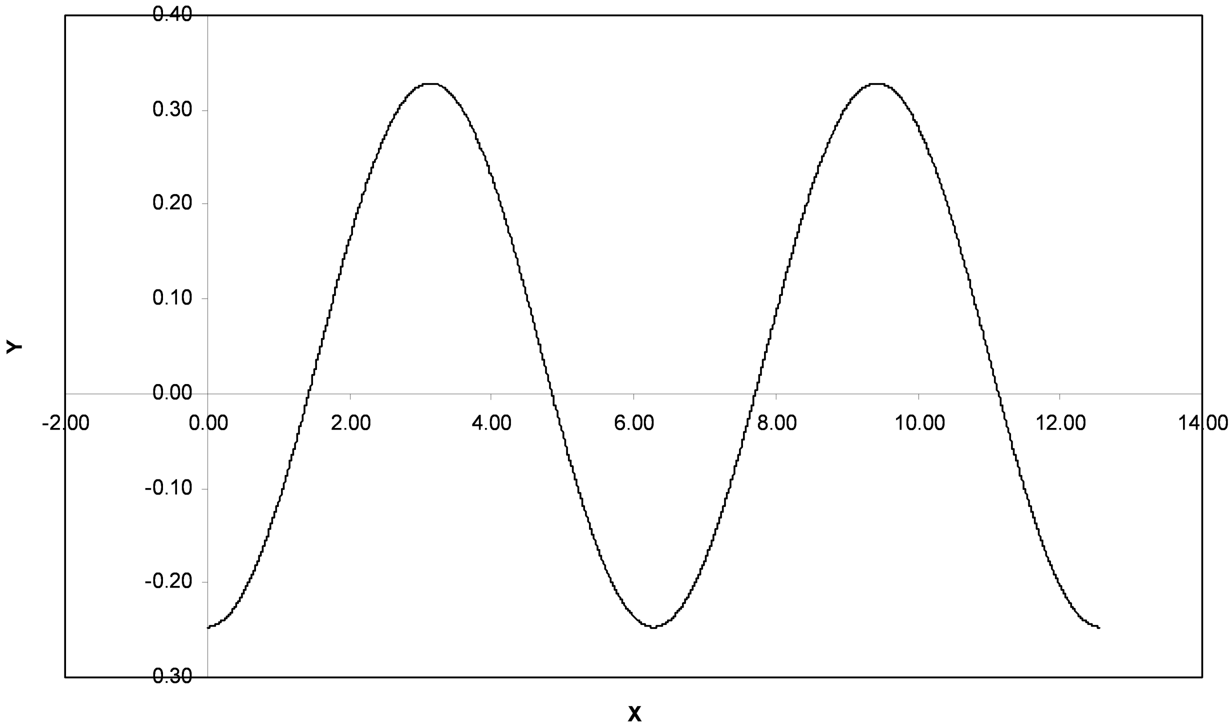
0.40
0.30
0.20
0.10
0.00
-0.10
-0.20
-0.30
Y
-2.00
0.00
2.00
4.00
6.00
8.00
10.00
12.00
14.00
X

Рис. 6.1

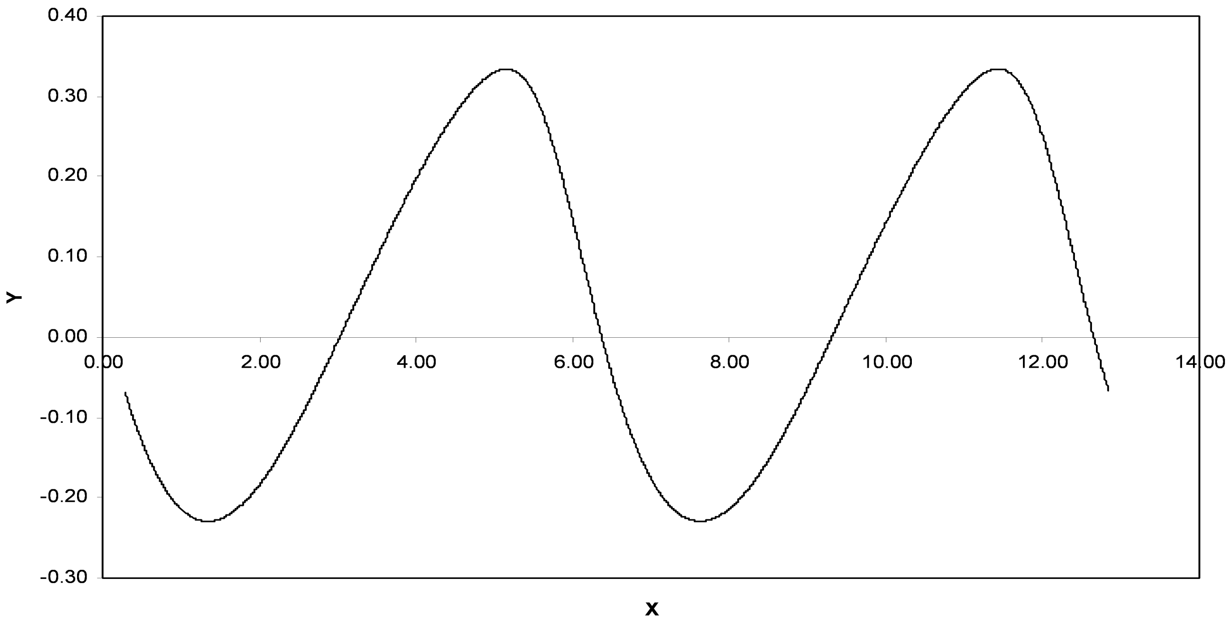
0.40
0.30
0.20
0.10
0.00
-0.10
-0.20
-0.30
Y
0.00
2.00
4.00
6.00
8.00
10.00
12.00
14.00
X

Рис. 6.2

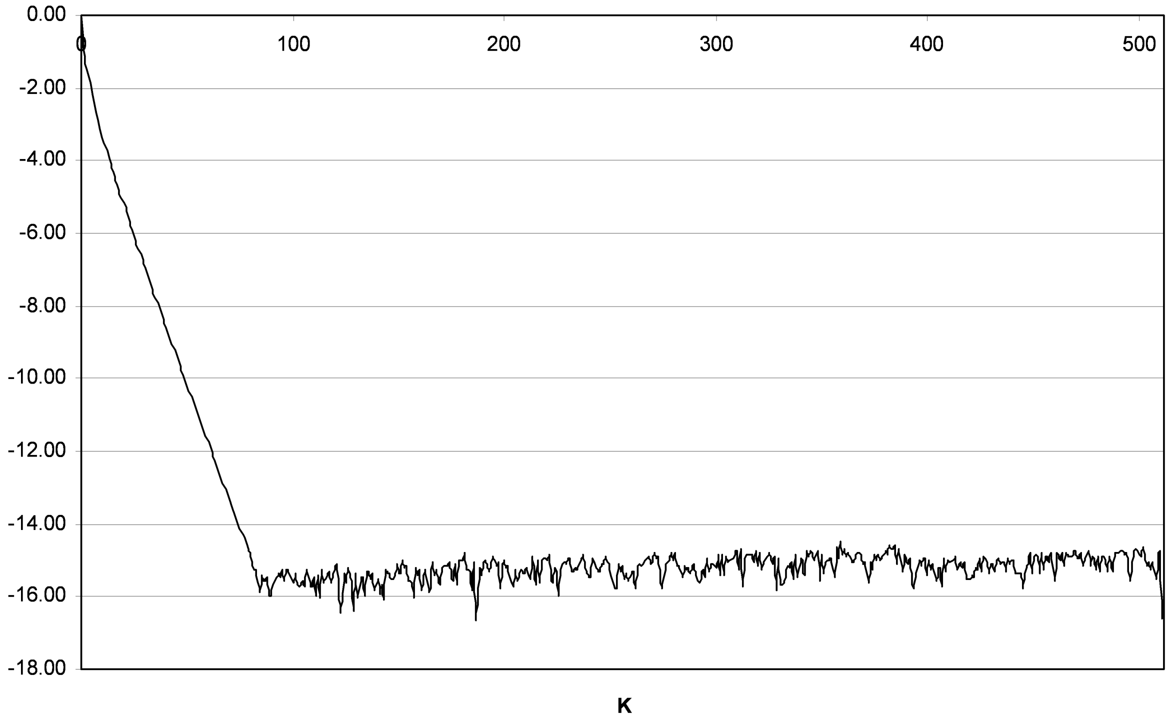
0.00
-2.00
-4.00
-6.00
-8.00
-10.00
-12.00
-14.00
-16.00
-18.00
Lg|Ck|
0
100
200
300
400
500
K

Рис. 6.3

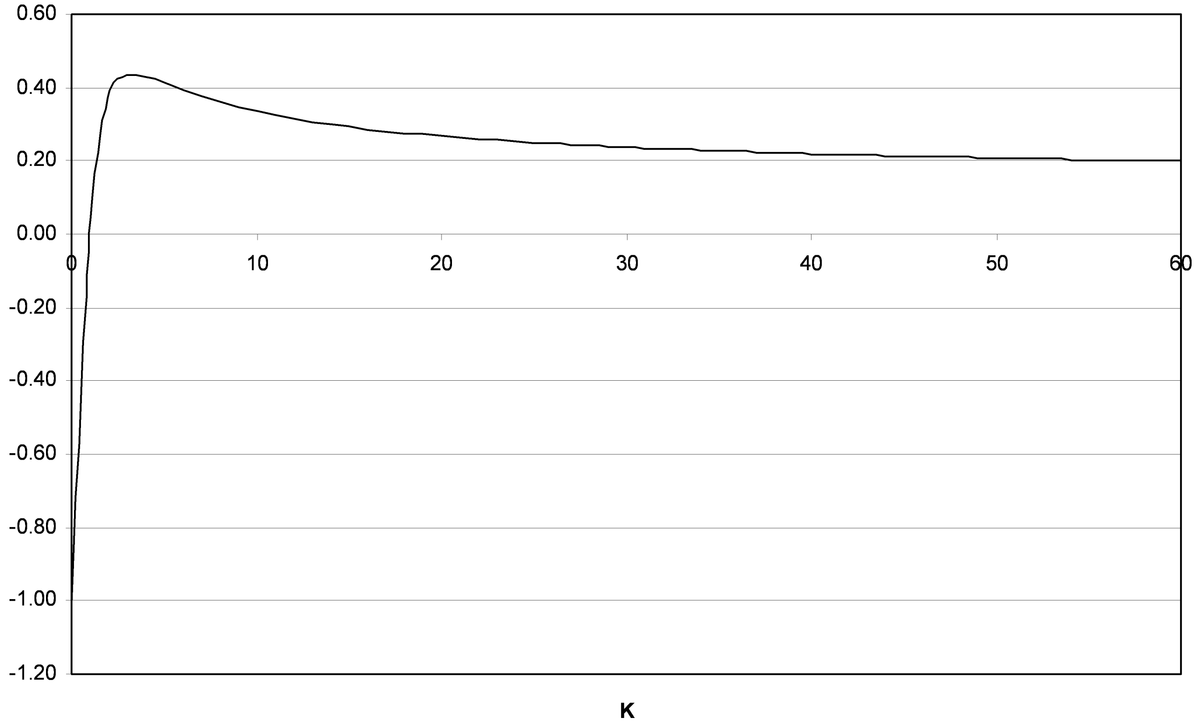
0.60
0.40
0.20
0.00
-0.20
-0.40
-0.60
-0.80
-1.00
-1.20
Lg|Ck|/k
0
10
20
30
40
50
60
K

Рис. 6.4

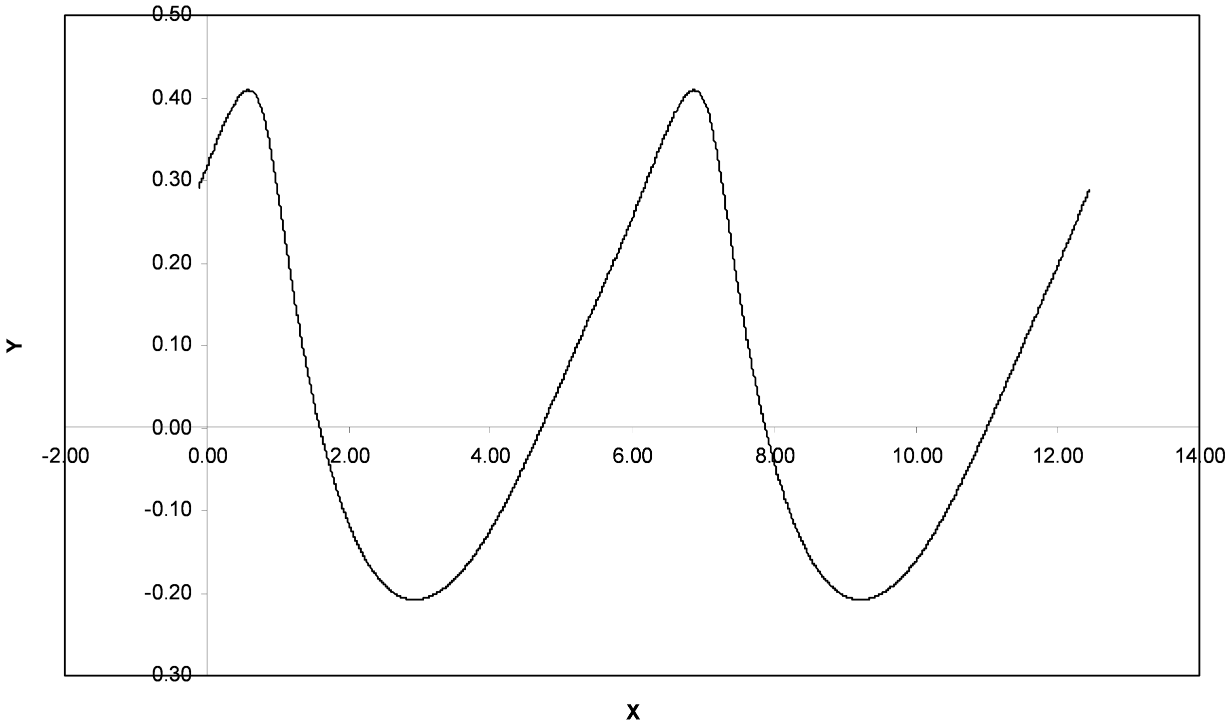
0.50
0.40
0.30
0.20
0.10
0.00
-0.10
-0.20
-0.30
Y
-2.00
0.00
2.00
4.00
6.00
8.00
10.00
12.00
14.00
X

Рис. 6.5

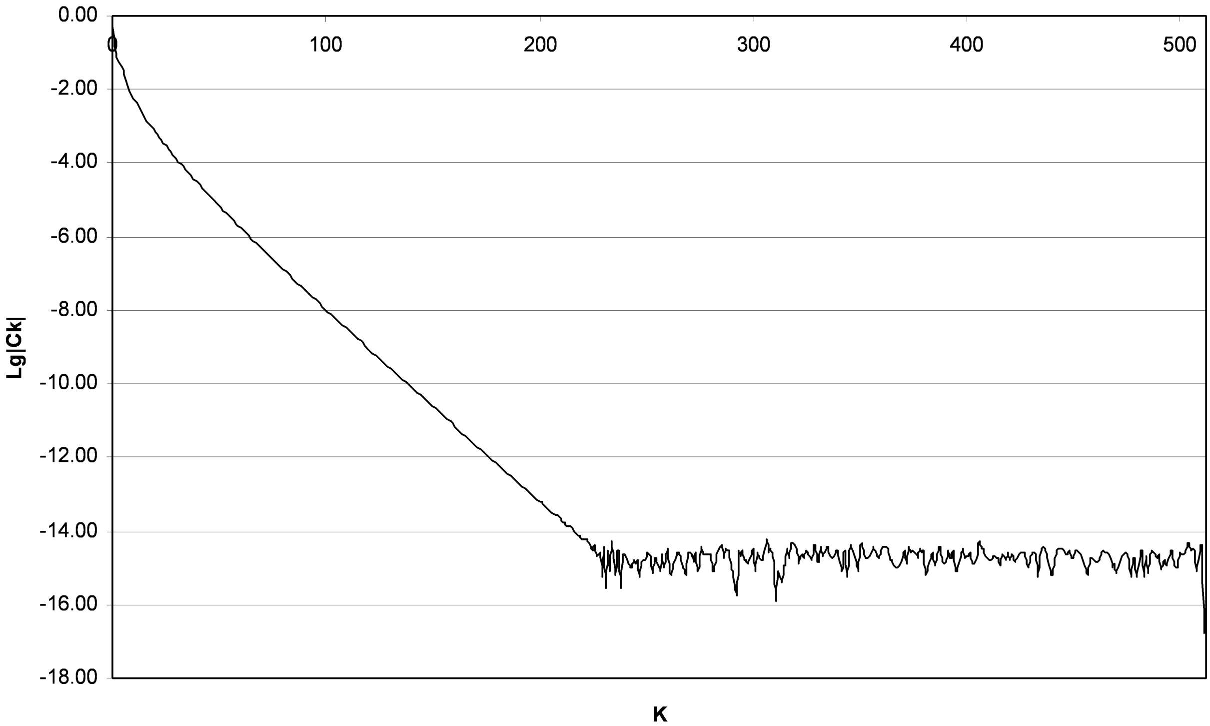
0.00
-2.00
-4.00
-6.00
-8.00
-10.00
-12.00
-14.00
-16.00
-18.00
Lg|Ck|
0
100
200
300
400
500
K

Рис. 6.6

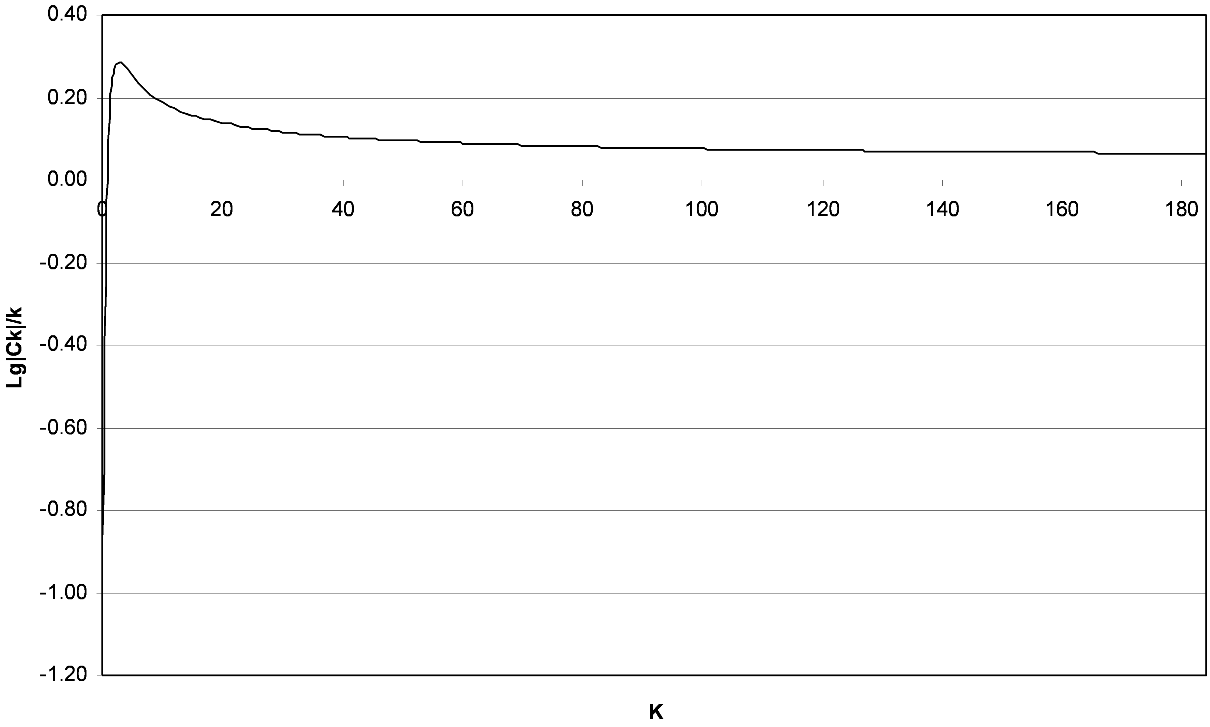
0.40
0.20
0.00
-0.20
-0.40
-0.60
-0.80
-1.00
-1.20
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
Lg|Ck|/k
K

Рис. 6.7

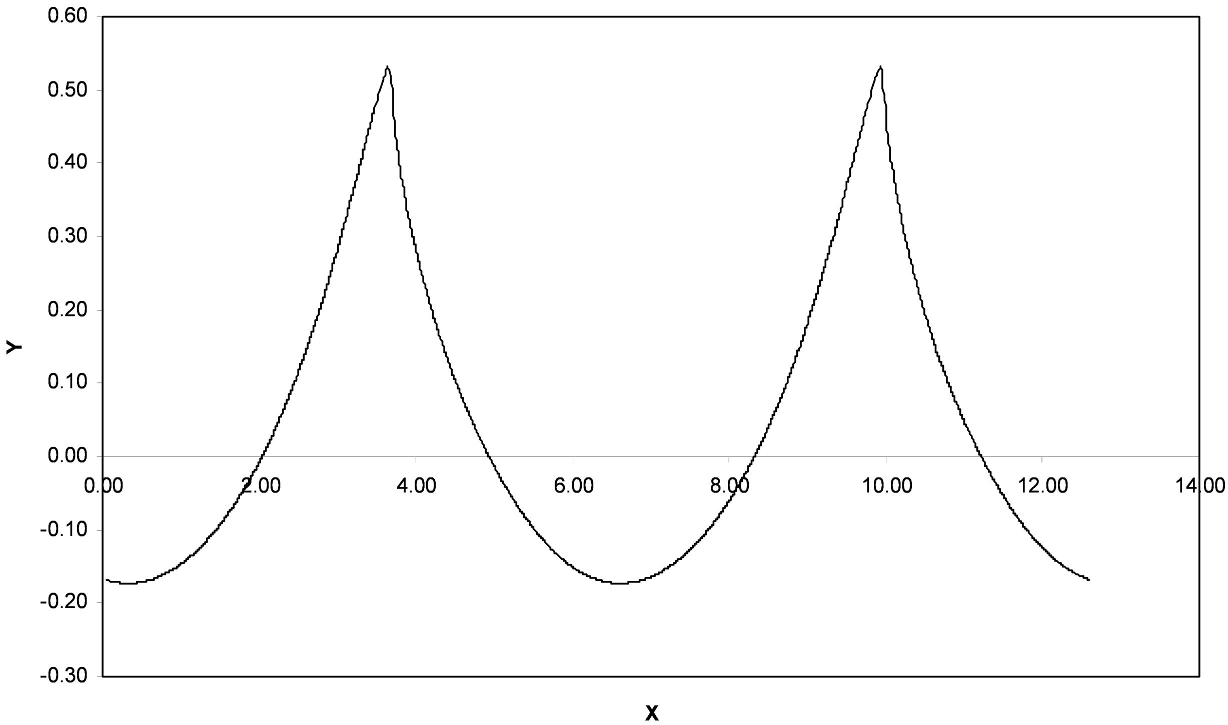
0.60
0.50
0.40
0.30
0.20
0.10
0.00
-0.10
-0.20
-0.30
0.00
2.00
4.00
6.00
8.00
10.00
12.00
14.00
Y
X

Рис. 6.8

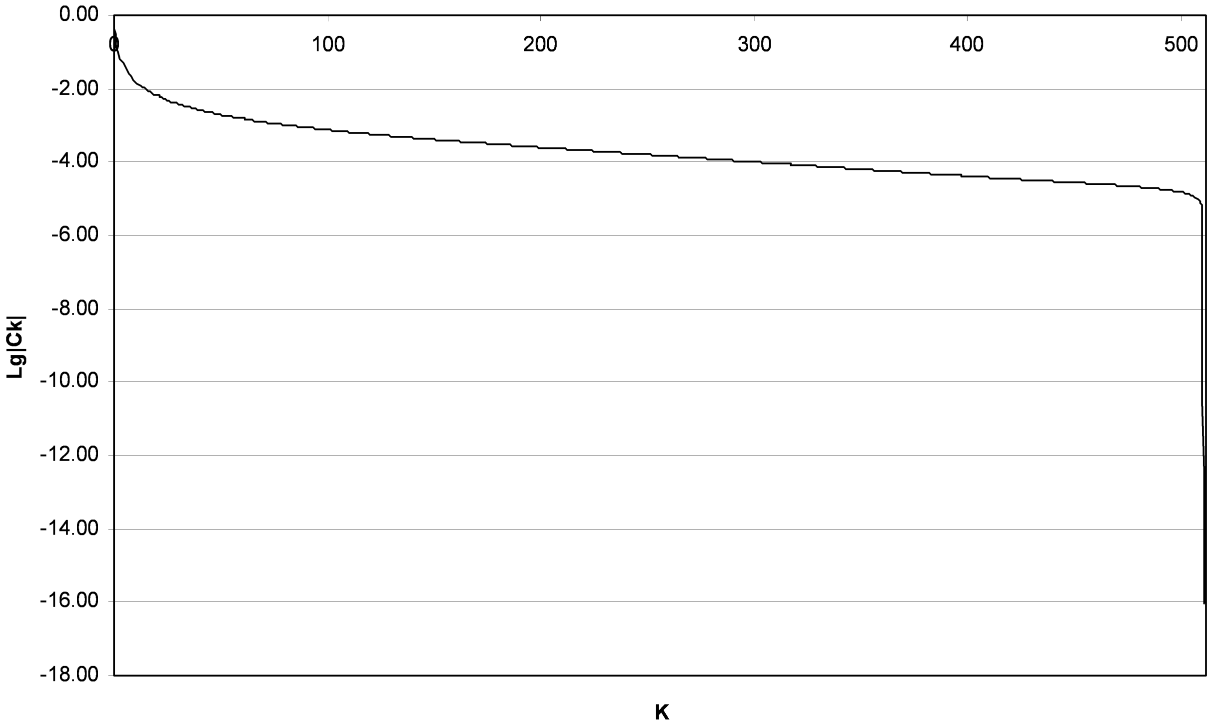

Рис. 6.9

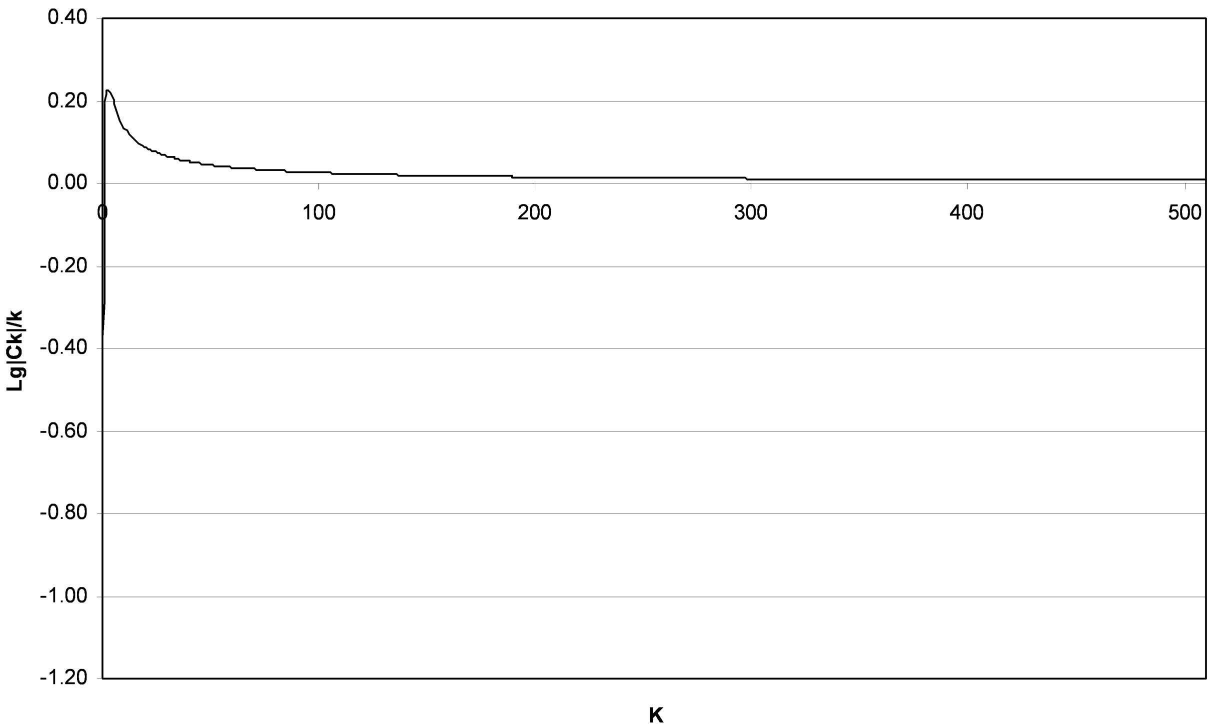

Рис. 6.10

Динамика изменения профиля, спектра и оценочной функции видна на рис. 6.5–6.10. Мы видим, что на последнем рисунке (рис. 6.10) значение оценочной функции при $k > 210$ имеет порядок 10^{-1}. Это отражает тот факт, что наше решение существует на отрезке $[0, 2]$, однако дальнейшая динамика решения связана с обрушением поверхностной волны. Это согласуется с результатами работы [21].

Автор выражает глубокую благодарность академику РАН В. Е. Захарову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воинов В. В.*, *Воинов О. В.* Численный метод расчета нестационарных движений идеальной несжимаемой жидкости со свободными поверхностями// Докл. АН. — 1975. — *221*, № 3. — С. 559–562.
2. *Гайер Д.* Лекции по теории аппроксимации в комплексных областях. — М.: Мир, 1986.
3. *Гарипов Р. М.* Неустановившиеся волны над подводным хребтом// Докл. АН. — 1965. — *161*, № 3. — С. 547–550.
4. *Дьяченко А. И.*, *Захаров В. Е.*, *Кузнецов Е. А.* Нелинейная динамика свободной поверхности идеальной жидкости// Физика плазмы. — 1999. — *22*, № 10. — С. 916–928.
5. *Колмогоров А. Н.*, *Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа, 7-е изд. — М.: Физматлит, 2004.
6. *Налимов В. И.* Априорные оценки решений эллиптических уравнений в классе аналитических функций и их приложения к задаче Коши—Пуассона// Докл. АН. — 1969. — *189*, № 1. — С. 45–49.
7. *Налимов В. И.* Задача Коши—Пуассона// Динамика сплошной среды. — 1974. — *18*. — С. 104–210.
8. *Налимов В. И.* Нестационарные вихревые волны // Сиб. мат. журн. — 1996. *37*, № 6. — С. 1356–1366.
9. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. — М.: Мир, 1977.
10. *Овсянников Л. В.* Нелинейная задача Коши в шкале банаховых пространств// Докл. АН. — 1971. — *200*, № 4. — С. 789–792.
11. *Протопопов Б. Е.* Численное моделирование поверхностных волн в канале переменной глубины// Вычислительные методы прикладной гидродинамики. — 1988. — *84*. — С. 91–105.
12. *Солонников В. А.* Разрешимость задачи об эволюции вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью, на конечном интервале времени// Алгебра и анализ. — 1991. — *1*. — С. 222–257.
13. *Шамин Р. В.* Об одном численном методе в задаче о движении идеальной жидкости со свободной поверхностью// Сиб. журн. выч. мат. — 2006. — *9*, № 4. — С. 325–340.
14. *Шамин Р. В.* О существовании гладких решений уравнений Дьяченко, описывающих неустановившиеся течения идеальной жидкости со свободной поверхностью// Докл. АН. — 2006. — *406*, № 5. — С. 112-113.
15. *Craig W.*, *Sulem C.* Numerical simulation of gravity waves// J. Comput. Phys. — 1993. — *108*. — C. 73–83.
16. *Craig W.*, *Wayne C. E.* Mathematical aspects of surface water waves// Round Table «Open Problems», International Workshop Mathematical Hydrodynamics, Moscow, June 12–17, 2006.
17. *Nishida T.* A note on a theorem of Nirenberg// J. Differential Geom. — 1977. — *12*. — C. 629—633.
18. *Treves F.* Ovsyannicov theorem and hyperdifferential operatore. — Rio de Janeiro, Instituto de Mathematica Pure e Aplicada, 1968.
19. *Tsai W.*, *Yue D.* Computations of nonlinear free-surface flows// Annu. Rev. Fluid Mech. — 1996. — *28*. — C. 249–278.
20. *Wu S.* Well-posedness in Sobolev spaces of the full water wave problem in 3-D// J. Amer. Math. Soc. — 1999. — *12*, № 2. — C. 445–495.
21. *Zakharov V. E.*, *Dyachenko A. I.*, *Vasilyev O. A.* New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface// Eur. J. Mech. B Fluids. — 2002. — *21*. — C. 283–291.

Роман Вячеславович Шамин
Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН
Лаборатория нелинейных волновых процессов
E-mail: `roman@shamin.ru`