

УДК 532.5

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН-УБИЙЦ

© 2013 г. Р. В. Шамин, А. В. Юдин

Представлено академиком В.Е. Захаровым 28.05.2012 г.

Поступило 29.05.2012 г.

DOI: 10.7868/S0869565213050228

В последнее время большое внимание уделяется изучению аномально больших поверхностных волн в океане – волн-убийц. Эти волны возникают внезапно и могут достигать значительной амплитуды – до 30 м (см. [1]). Во многих работах такие волны изучались с помощью численного моделирования [2–4]. В натуральных экспериментах, как правило, волны-убийцы обнаруживаются при анализе мареограмм – записей возвышения поверхности в заданной точке. С другой стороны, успехи применения уравнений в конформных переменных для точного моделирования нелинейных волн на воде [5–9] позволяют исследовать пространственно-временные картины динамики поверхностных волн и, в частности, наблюдать волны-убийцы.

В работе [3] получены оценки вероятности возникновения волн-убийц в вычислительных экспериментах. При этом частота появления волн-убийц в этих экспериментах была весьма заметной даже при умеренных крутизнах. В то же время в записях натуральных экспериментов возникновение волн-убийц – относительно редкое явление [10]. Возникает вопрос: почему в вычислительных экспериментах волны-убийцы наблюдаются на порядок чаще, чем в натуральных наблюдениях? Помимо очевидной причины – несоответствия вычислительных экспериментов натурной ситуации, есть и другое существенное обстоятельство. В вычислительных экспериментах мы рассматриваем полные пространственно-временные записи, тогда как в натуральных – лишь временную запись в одной точке. Как показано в настоящей работе, одно это обстоятельство может снижать вероятность обнаружения волн-убийц более чем в 20 раз.

Опишем проведенные нами вычислительные эксперименты. Рассматривается динамика иде-

альной жидкости со свободной поверхностью в плоском случае с бесконечно глубоким дном $0 < x < 2\pi$, $-\infty < y < \eta(x, t)$. Граничные условия на концах интервала $x = 0, 2\pi$ были периодическими. Предполагая течение потенциальным, а жидкость несжимаемой, имеем

$$v = \nabla\phi, \quad \operatorname{div} v = 0,$$

так что потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\phi = 0.$$

С этим уравнением связываются кинематическое и динамическое граничные условия:

$$(\eta_t + \Phi_x \eta_x - \Phi_y) \Big|_{y=\eta(x,t)} = 0, \quad (1)$$

$$\left(\Phi_t + \frac{1}{2} |\nabla\Phi|^2 + gy \right) \Big|_{y=\eta(x,t)} = 0, \quad (2)$$

где g – ускорение поля тяжести. На дне рассматривалось условие непротекания

$$\Phi_y \Big|_{y=-\infty} = 0.$$

Для построения эффективных численных методов мы использовали уравнения в конформных переменных. Для этого осуществляется конформное отображение области, занятой жидкостью, на нижнюю полуплоскость, координаты которой $w = u + iv$. Отображение задается функцией $z = z(w)$, $z = x + iy$.

Динамические уравнения формулируются для переменных Дьяченко

$$R = \frac{1}{z'_w}, \quad V = i \frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

и имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{R}(u, t) &= i(UR' - U'R), \\ \dot{V}(u, t) &= i(UV' - B'R) + g(R - 1), \\ U &= P(VR^* + RV^*), \\ B &= P(VV^*), \end{aligned} \quad (3)$$

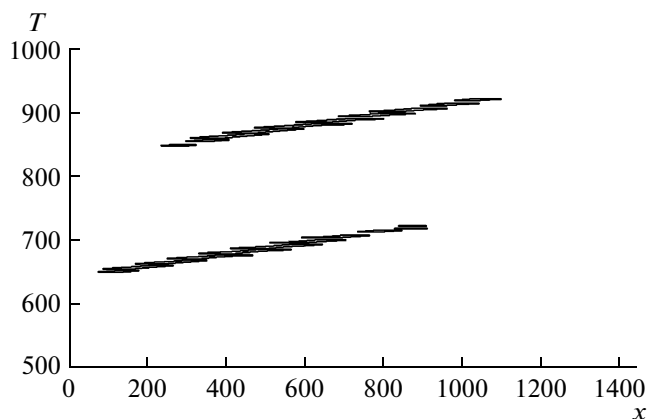


Рис. 1. Пространственно-временные следы волн-убийц.

где P – оператор проектирования на нижнюю полуплоскость: $P = \frac{1}{2}(I + iH)$, H – аналог оператора Гильберта для периодического случая

$$H[f](u) = \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_0^{2\pi} \frac{f(u')}{\operatorname{tg}\left(\frac{u' - u}{2}\right)} du'.$$

Математические вопросы, связанные с разрешимостью уравнений (3), рассмотрены в цикле работ Р.В. Шамина [11–14].

Постановки наших вычислительных экспериментов в основном соответствовали экспериментам, описанным в работе [3]. Начальное волнение задавалось как ансамбль бегущих в одну сторону волн. Среднее значение волнового числа $K_0 = 25$. При построении начальных данных мы использовали в качестве параметров квадрат средней крутизны $\mu^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta_x^2 dx$ и спектральную ширину – дисперсию D (см. [3]).

Всего было проведено 1408 элементарных экспериментов. Квадрат средней крутизны принимал значения $\mu^2 = 2.06 \cdot 10^{-3}, 3.08 \cdot 10^{-3}, 4.10 \cdot 10^{-3}$, дисперсия $D \in \{0.07, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21\}$. Для каждого фиксированного значения квадрата средней крутизны и дисперсии проводили по 32 однотипных численных опыта.

В каждом отдельном эксперименте расчет проводили при $0 \leq t \leq 100$, что соответствовало приблизительно 200 периодам волн. Для того чтобы предотвратить преждевременное обрушение волн, была использована диссипация в старших гармониках, а также накачка для поддержания заданного уровня энергии в ходе эксперимента.

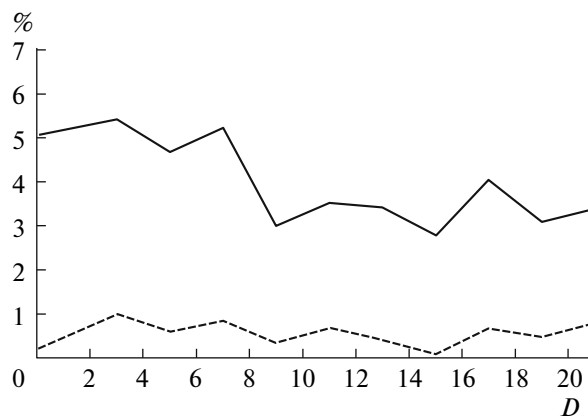


Рис. 2. Проценты совпадений в обнаружении волн-убийц без прореживания (сплошная линия) и с десятикратным прореживанием (штриховая).

Волны-убийцы регистрировались согласно стандартному амплитудному критерию:

$$v(t^*) = \frac{H_{\max}(t^*)}{H_s(t)} \geq 2.1,$$

где $H_s(t)$ – значительная высота волнения, а $H_{\max}(t)$ – максимальная амплитуда волны в момент t . Подчеркнем, что значительную высоту волнения рассчитывали по пространственной записи профиля волн в фиксированный момент времени.

На приведенном здесь рис. 1 мы видим следы двух волн-убийц.

В натуральных экспериментах, как правило, нам доступна лишь временная запись – волнограмма в фиксированной точке x^* :

$$A(t) = \eta(x^*, t), \quad 0 < t < T.$$

По графику функции $A(t)$ также можно вычислить значительную высоту волнения и обнаруживать волны-убийцы с помощью аналогичного критерия.

Чтобы сравнить частоту обнаружения волн-убийц по амплитудному критерию в вычислительных и натуральных экспериментах, получим процент совпадений при обнаружении аномально больших волн по пространственно-временной записи волн и по волнограмме. На рис. 2 приведена частота совпадений в зависимости от спектральной ширины начальных волн в процентах. Поскольку в натуральных экспериментах датчики осуществляют запись волнограммы с определенной частотой, иногда весьма невысокой, то на рис. 2 также приведен график обнаружения волн-убийц в случае десятикратного прореживания волнограммы.

Из результатов, представленных на рис. 2, видно, что с помощью волнограммы мы можем обнаруживать около 5% возникающих волн-убийц. При этом наличие прореживания уменьшает этот процент еще в несколько раз. Таким образом,

волны-убийцы регистрируются в натуральных экспериментах значительно реже, чем они возникают в рассматриваемом районе океана. Объясняется это тем, что волны-убийцы могут обрушиваться, не доходя до места регистрации, а также тем, что волна-убийца не в каждый момент времени удовлетворяет амплитудному критерию и может “пройти” над датчиком глубины без значительного возвышения. Полученные нами оценки показывают, что необходимо уточнять методику обнаружения волн-убийц натурными экспериментами.

Авторы выражают благодарность акад. В.Е. Захарову за постановку задачи и внимание к работе, а также проф. Е.Н. Пелиновскому за полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта НШ-7550.2006.2 и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Математические методы в нелинейной динамике”, а также при поддержке гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования (Договор № 11.Г34.31.0035 от 25 ноября 2010 г. между Минобрнауки РФ, НГУ и ведущим ученым).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kharif C., Pelinovsky E., Slunyaev A.* Rogue Waves in the Ocean. В.: Springer, 2009. 216 p.
2. *Zakharov V.E., Dyachenko A.I., Prokofiev A.O.* // *Eur. J. Mech. B. Fluids.* 2006. V. 25. P. 677–692.
3. *Захаров В.Е., Шамин Р.В.* // Письма в ЖЭТФ. 2010. Т. 91. В. 2. С. 68–71.
4. *Chalikov D.* // *Phys. Fluids.* 2009. V. 21. Iss. 7.
5. *Дьяченко А.И.* // ДАН. 2001. Т. 376. № 1. С. 27–29.
6. *Zakharov V.E., Dyachenko A.I., Vasilyev O.A.* // *Eur. J. Mech. B. Fluids.* 2002. V. 21. P. 283–291.
7. *Chalikov D., Sheinin D.* // *J. Comput. Phys.* 2005. V. 210. P. 247–273.
8. *Ruban V.P.* // *Phys. Lett. A.* 2005. V. 340. № 1/4. P. 194–200.
9. *Слюняев А.В., Сергеева А.В.* // *Фундам. и прикл. гидрофизика.* 2012. Т. 5. № 1. С. 24–36.
10. *Зайцев А.И., Малашенко А.Е., Пелиновский Е.Н.* // *Фундам. и прикл. гидрофизика.* 2011. Т. 4. № 4. С. 35–42.
11. *Шамин Р.В.* // ДАН. 2006. Т. 406. № 5. С. 112–113.
12. *Шамин Р.В.* Вычислительные эксперименты в моделировании поверхностных волн в океане. М.: Наука, 2008.
13. *Шамин Р.В.* В кн.: Современная математика. Фундаментальные направления. М.: РУДН, 2008. Т. 28. С. 3–144.
14. *Шамин Р.В.* // ДАН. 2008. Т. 418. № 5. С. 603–604.