

УДК 532.5

ОПИСАНИЕ ДИНАМИКИ ВОЛН НА ВОДЕ НА ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

© 2011 г. Р. В. Шамин

Представлено академиком В.Е. Захаровым 14.11.2010 г.

Поступило 08.02.2011 г.

В работе рассматриваются уравнения, описывающие нестационарное течение идеальной жидкости со свободной поверхностью. Теоремы о существовании решений уравнений, описывающих поверхностные волны идеальной жидкости, рассматривались во многих работах [1–4]. В этих работах были получены результаты, свидетельствующие о существовании решений лишь на достаточно малом временном интервале. В работах [5, 6] рассматривались оценки времени существования решения уравнений, описывающих поверхностные волны на воде. В настоящей работе предложена аппроксимация эволюционных уравнений с помощью дифференциальных включений. Такая аппроксимация позволяет оценивать время существования решений с помощью вычислительных экспериментов, а также является математическим основанием для проведения доказательных вычислительных экспериментов.

Результаты, представленные в данном сообщении, были использованы в исследованиях поверхностных волн экстремальной амплитуды, так называемых волн-убийц, в частности в работе [7]. Во многих работах (см. [8, 9]) волны-убийцы изучались также с помощью численного моделирования.

Пусть идеальная несжимаемая жидкость занимает область в плоскости (x, y) , ограниченную свободной поверхностью

$$\begin{aligned} -\infty < y < \eta(x, t), \\ -\infty < x < \infty, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Считая движение жидкости потенциальным, имеем $v(x, y, t) = \nabla\phi(x, y, t)$, где $v(x, y, t)$ – двумерное поле скоростей, а $\phi(x, y, t)$ – потенциал.

Будем изучать уравнения в конформных переменных в модифицированной форме, полученные в работе [10]. Заметим, что эти уравнения эквивалентны уравнению Эйлера, рассматриваемому в области со свободной границей. Аналогичные уравнения были получены в работе [11], а затем

использованы в работах многих авторов, например, [12, 13] и др.

Введем функциональные пространства. Через \tilde{E} обозначим множество функций вида

$$f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k e^{-iku}, \quad u \in [0, 2\pi).$$

Рассмотрим шкалу гильбертовых пространств E_s , $s \geq 0$, как пополнение множества \tilde{E} по нормам, соответствующим скалярным произведениям

$$(f, g)_{E_s} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \bar{g}_k (1+k^2)^{2sk}.$$

Через $C^k([0, T]; E_s)$ будем обозначать пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций, заданных на $[0, T]$, со значениями в E_s с нормой

$$\|f\|_{C^k([0, T]; E_s)} = \sum_{j=0}^k \max_{t \in [0, T]} \|f^{(j)}(t)\|_{E_s}.$$

Также будем использовать пространство $L_{\infty}(0, T; X)$, состоящее из измеримых на $(0, T)$ функций со значениями в пространстве X , таких что конечна норма

$$\|u\|_{L_{\infty}(0, T; X)} = \text{vrai sup}_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X,$$

т.е. равная нижней грани всех констант C , для которых множество $\{t \in [0, T]: \|u(t)\|_X > C\}$ имеет лебегову меру нуль. Будем также рассматривать пространство $W_{\infty}^1(0, T; X)$ абсолютно непрерывных функций со значениями в X , имеющих первую производную из $L_{\infty}(0, T; X)$ с нормой

$$\|u\|_{W_{\infty}^1(0, T; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X + \text{vrai sup}_{t \in [0, T]} \|u'(t)\|_X.$$

Введем формальное обозначение $P(f, g)$:

$$P\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k e^{-iku}, \sum_{k=0}^{\infty} g_k e^{-iku}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{-iku},$$

$$\text{где } c_0 = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} f_m \bar{g}_m, \quad c_k = \sum_{m=k}^{\infty} f_m \bar{g}_{m-k}.$$

Будем рассматривать эволюционные уравнения в конформных переменных, которые представляют собой систему нелинейных интегродифференциальных уравнений первого порядка. Неизвестными в этих уравнениях считаем пару комплекснозначных функций $R, V \in W_\infty^1(0, T; E_s)$. Уравнения выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{R}(t, u) &= i(U(t, u)R'(t, u) - U'(t, u)R(t, u)), \\ \dot{V}(t, u) &= i(U(t, u)V'(t, u) - B'(t, u)R(t, u)) + \\ &\quad + g(R(t, u) - 1), \\ U(t, u) &= P(V, R)(t, u) + P(R, V)(t, u), \\ B(t, u) &= P(V, V)(t, u), \\ R(0, u) &= R_0(u), \quad V(0, u) = V_0(u). \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть фиксировано $s > 0$. Тогда решением задачи (1) на $[0, T]$ будем называть пару функций R, V из пространства $W_\infty^1(0, T; E_s)$, удовлетворяющих (1).

Покажем, как восстанавливается профиль свободной поверхности по функции R . Пусть $R(u, t) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k(t)e^{-iku}$, где $r_0 = 1$. Тогда последовательность $c_k(t), k = 0, 1, \dots$, определим как решение системы

$$\begin{aligned} c_0 &= 1, \\ \sum_{j=0}^k c_{k-j}(t)r_j(t) &= 0, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Поскольку эта система является диагональной, то ее решение может быть получено по рекуррентным формулам.

Далее, построим комплекснозначную функцию

$$z(u, t) = u + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{-ik} c_k(t) e^{-iku}.$$

Кривая, заданная как геометрическое место точек

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= \{(x, y): x = \operatorname{Re} z(u, t), \\ &\quad y = \operatorname{Im} z(u, t), u \in [0, 2\pi]\}, \end{aligned}$$

представляет собой профиль свободной поверхности.

По функциям $R(t, u)$ и $V(t, u)$ можно построить функцию $\Phi(t, u) = -i \int_R^V du$. Вещественная часть функции V является значением потенциала скоростей на свободной границе.

При решении океанологических задач, как правило, имеет смысл рассматривать решения, принадлежащие заданному множеству $M \subset W_\infty^1(0, T; E_s)$. В качестве множества M будем рассматривать

множество $M(A, C, s_1) = \{f \in C^2([0, T]; E_s): \|f\|_{C^2([0, T]; E_s)} \leq A, |f_k(t)| \leq Ce^{-2s_1 k}\}$, где $A > 0, C > 0, s_1 > s$ – фиксированные числа.

Помимо задачи (1) имеет физический смысл и следующая задача:

$$\begin{aligned} \dot{R}(t, u) &= i(UR' - U'R) + \delta_R(t, u), \\ \dot{V}(t, u) &= i(UV' - B'R) + g(R - 1) + \delta_V(t, u), \\ U &= P(V, R) + P(R, V), \quad B = P(V, V), \\ R(0, u) &= R_0(u), \quad V(0, u) = V_0(u). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь функции δ_R и δ_V представляют собой внешние воздействия на поверхностные волны. Во многих задачах конкретный вид этих функций является неизвестным. Поэтому мы приходим к следующей задаче. Для фиксированного $\delta > 0$ найти число $T > 0$, функции $R, V \in M(A, C, s_1)$ и функции $\delta_R, \delta_V \in L_\infty(0, T; E_s)$, такие что $\|\delta_R\|_{L_\infty(0, T; E_s)} \leq \delta$ и $\|\delta_V\|_{L_\infty(0, T; E_s)} \leq \delta$, удовлетворяющие (2). Задача (2) эквивалентна задаче на нахождение селектора дифференциального включения

$$\begin{aligned} \dot{R}(t, u) &\in \Gamma_R^\delta(R(t, u), V(t, u)), \\ \dot{V}(t, u) &\in \Gamma_V^\delta(R(t, u), V(t, u)), \end{aligned}$$

где множества $\Gamma_R^\delta, \Gamma_V^\delta$ определяются по формулам $\Gamma_R^\delta(R, V) = \{i(UR' - U'R) + \delta_R(t, u): \|\delta_R\|_{L_\infty(0, T; E_s)} \leq \delta\}$, $\Gamma_V^\delta(R, V) = \{i(UV' - B'R) + g(R - 1) + \delta_V(t, u): \|\delta_V\|_{L_\infty(0, T; E_s)} \leq \delta\}$.

Теорема 1. Пусть $R_0, V_0 \in E_s$. Для любого $\delta > 0$ существуют число $T > 0$, функции $R, V \in M(A, C, s_1)$ и функции $\delta_R, \delta_V \in L_\infty(0, T; E_s)$, такие что $\|\delta_R\|_{L_\infty(0, T; E_s)} \leq \delta, \|\delta_V\|_{L_\infty(0, T; E_s)} \leq \delta$, удовлетворяющие (2).

Поскольку уравнения (1), вообще говоря, не допускают глобальных по времени решений, то возникает важная проблема оценки времени существования решений этих уравнений. Введем числовую величину T_δ как точную верхнюю грань таких чисел $(0, \mathbb{T}]$, для которых существует решение задачи (2), где $\mathbb{T} > 0$ – некоторое наперед заданное число. Имеет место теорема, устанавливающая связь между задачей (2) и задачей (1).

Теорема 2. Пусть $R_0, V_0 \in E_s$. Тогда $T_\delta \rightarrow T_0$ при $\delta \rightarrow +0$, где T_0 совпадает с точной верхней гранью таких чисел $(0, \mathbb{T}]$, для которых существует решение задачи (1).

Автор выражает благодарность академику В.Е. Захарову за постановку задачи и внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта НШ-7550.2006.2 и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Математические методы в нелинейной динамике”, а также при поддержке гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования (Договор от 25 ноября 2010 г. № 11.G34.31.0035 между Минобрнауки России, НГУ и ведущим ученым).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Налимов В.И.* // Динамика сплошной среды. 1974. Т. 18. С. 104–210.
2. *Wu S.* // Invent. Math. 1997. V. 130. P. 39–72.
3. *Lannes D.* // Amer. Math. Soc. 2005. V. 18. № 3. P. 605–654.
4. *Шамин Р.В.* // ДАН. 2006. Т. 406. № 5. С. 112–113.
5. *Шамин Р.В.* Вычислительные эксперименты в моделировании поверхностных волн в океане. М.: Наука, 2008.
6. *Шамин Р.В.* // ДАН. 2008. Т. 418. № 5. С. 603–604.
7. *Захаров В.Е., Шамин Р.В.* // Письма в ЖЭТФ. 2010. Т. 91. В. 2. С. 68–71.
8. *Zakharov V.E., Dyachenko A.I., Prokofiev A.O.* // Europ. J. Mech. B Fluids. 2006. V. 25. P. 677–692.
9. *Chalikov D.* // Phys. Fluids. 2009. V. 21. Iss. 7.
10. *Zakharov V.E., Dyachenko A.I., Vasilyev O.A.* // Europ. J. Mech. B Fluids. 2002. V. 21. P. 283–291.
11. *Овсянников Л.В.* В сб.: Динамика сплошной среды. Новосибирск: СО АН СССР; Ин-т гидродинамики, 1973. В. 15. С. 104–125.
12. *Chalikov D., Sheinin D.* // Adv. Fluid. Mech. 1998. V. 17. P. 89–110.
13. *Дьяченко А.И., Захаров В.Е., Кузнецов Е.А.* // Физика плазмы. 1999. Т. 22. № 10. С. 916–928.