ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2011, том 438, № 4, с. 453–455

МАТЕМАТИКА

УДК 532.5

ОПИСАНИЕ ДИНАМИКИ ВОЛН НА ВОДЕ НА ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

© 2011 г. Р. В. Шамин

Представлено академиком В.Е. Захаровым 14.11.2010 г.

Поступило 08.02.2011 г.

В работе рассматриваются уравнения, описывающие нестационарное течение идеальной жидкости со свободной поверхностью. Теоремы о существовании решений уравнений, описывающих поверхностные волны идеальной жидкости, рассматривались во многих работах [1–4]. В этих работах были получены результаты, свидетельствующие о существовании решений лишь на достаточно малом временном интервале. В работах [5, 6] рассматривались оценки времени существования решения уравнений, описывающих поверхностные волны на воде. В настоящей работе предложена аппроксимация эволюционных уравнений с помощью дифференциальных включений. Такая аппроксимация позволяет оценивать время существования решений с помощью вычислительных экспериментов, а также является математическим основанием для проведения доказательных вычислительных экспериментов.

Результаты, представленные в данном сообщении, были использованы в исследованиях поверхностных волн экстремальной амплитуды, так называемых волн-убийц, в частности в работе [7]. Во многих работах (см. [8, 9]) волны-убийцы изучались также с помощью численного моделирования.

Пусть идеальная несжимаемая жидкость занимает область в плоскости (x, y), ограниченную свободной поверхностью

$$-\infty < y < \eta(x, t),$$
$$-\infty < x < \infty, \quad t > 0.$$

Считая движение жидкости потенциальным, имеем $v(x, y, t) = \nabla\phi(x, y, t)$, где $v(x, y, t)$ – двумерное поле скоростей, а $\phi(x, y, t)$ – потенциал.

Будем изучать уравнения в конформных переменных в модифицированной форме, полученные в работе [10]. Заметим, что эти уравнения эквивалентны уравнению Эйлера, рассматриваемому в области со свободной границей. Аналогичные уравнения были получены в работе [11], а затем использованы в работах многих авторов, например, [12, 13] и др.

Введем функциональные пространства. Через $\tilde{E}$ обозначим множество функций вида

$$f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k e^{-iku}, \quad u \in [0, 2\pi).$$

Рассмотрим шкалу гильбертовых пространств E_s, $s \geq 0$, как пополнение множества $\tilde{E}$ по нормам, соответствующим скалярным произведениям

$$(f, g)_{E_s} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \bar{g}_k (1 + k^2) e^{2sk}.$$

Через $C^k([0, T]; E_s)$ будем обозначать пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций, заданных на $[0, T]$, со значениями в E_s с нормой

$$\| f \|_{C^k([0, T]; E_s)} = \sum_{j=0}^{k} \max_{t \in [0, T]} \|f^{(k)}(t)\|_{E_s}.$$

Также будем использовать пространство $L_\infty(0, T; X)$, состоящее из измеримых на $(0, T)$ функций со значениями в пространстве X, таких что конечна норма

$$\|u\|_{L_\infty(0, T; X)} = \operatorname{vrai} \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X,$$

т.е. равная нижней грани всех констант C, для которых множество $\{t \in [0, T]: \|u(t)\|_X > C\}$ имеет лебегову меру нуль. Будем также рассматривать пространство $W^1_\infty(0, T; X)$ абсолютно непрерывных функций со значениями в X, имеющих первую производную из $L_\infty(0, T; X)$ с нормой

$$\|u\|_{W^1_\infty(0, T; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X + \operatorname{vrai} \sup_{t \in [0, T]} \|u'(t)\|_X.$$

Введем формальное обозначение $P(f, g)$:

$$P\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k e^{-iku}, \sum_{k=0}^{\infty} g_k e^{-iku}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{-iku},$$

где $c_0 = \dfrac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty} f_m \bar{g}_m$, $c_k = \sum_{m=k}^{\infty} f_m \bar{g}_{m-k}$.

Институт океанологии им. П.П. Ширшова Российской Академии наук, Москва

Будем рассматривать эволюционные уравнения в конформных переменных, которые представляют собой систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка. Неизвестными в этих уравнениях считаем пару комплекснозначных функций R, $V \in W^1_\infty(0, T; E_s)$. Уравнения выглядят следующим образом:

$$\begin{gathered}
\dot{R}(t,u) = i(U(t,u)R'(t,u) - U'(t,u)R(t,u)),\\
\dot{V}(t,u) = i(U(t,u)V'(t,u) - B'(t,u)R(t,u)) +\\
+ g(R(t,u) - 1),\\
U(t,u) = P(V,R)(t,u) + P(R,V)(t,u),\\
B(t,u) = P(V,V)(t,u),\\
R(0,u) = R_0(u), \quad V(0,u) = V_0(u).
\end{gathered} \tag{1}$$

Пусть фиксировано $s > 0$. Тогда решением задачи (1) на $[0, T]$ будем называть пару функций R, V из пространства $W^1_\infty(0, T; E_s)$, удовлетворяющих (1).

Покажем, как восстанавливается профиль свободной поверхности по функции R. Пусть $R(u, t) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k(t)e^{-iku}$, где $r_0 = 1$. Тогда последовательность $c_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots$, определим как решение системы

$$c_0 = 1,$$

$$\sum_{j=0}^{k} c_{k-j}(t)r_j(t) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Поскольку эта система является диагональной, то ее решение может быть получено по рекуррентным формулам.

Далее, построим комплекснозначную функцию

$$z(u,t) = u + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{-ik} c_k(t) e^{-iku}.$$

Кривая, заданная как геометрическое место точек

$$\begin{gathered}
\Gamma(t) = \{(x,y) : x = \mathrm{Re}\,z(u,t),\\
y = \mathrm{Im}\,z(u,t),\ u \in [0, 2\pi]\},
\end{gathered}$$

представляет собой профиль свободной поверхности.

По функциям $R(t, u)$ и $V(t, u)$ можно построить функцию $\Phi(t, u) = -i\int \frac{V}{R}du$. Вещественная часть функции V является значением потенциала скоростей на свободной границе.

При решении океанологических задач, как правило, имеет смысл рассматривать решения, принадлежащие заданному множеству $M \subset W^1_\infty(0, T; E_s)$. В качестве множества M будем рассматривать множество $M(A, C, s_1) = \{f \in C^2([0, T]; E_s)$: $\|f\|_{C^2([0,T];\,E_s)} \le A$, $|f_k(t)| \le Ce^{-2s_1k}\}$, где $A > 0$, $C > 0$, $s_1 > s$ – фиксированные числа.

Помимо задачи (1) имеет физический смысл и следующая задача:

$$\begin{gathered}
\dot{R}(t,u) = i(UR' - U'R) + \delta_R(t,u),\\
\dot{V}(t,u) = i(UV' - B'R) + g(R-1) + \delta_V(t,u),\\
U = P(V,R) + P(R,V), \quad B = P(V,V),\\
R(0,u) = R_0(u), \quad V(0,u) = V_0(u).
\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь функции δ_R и δ_V представляют собой внешние воздействия на поверхностные волны. Во многих задачах конкретный вид этих функций является неизвестным. Поэтому мы приходим к следующей задаче. Для фиксированного $\delta > 0$ найти число $T > 0$, функции R, $V \in M(A, C, s_1)$ и функции δ_R, $\delta_V \in L_\infty(0, T; E_s)$, такие что $\|\delta_R\|_{L_\infty(0,T;\,E_s)} \le \delta$ и $\|\delta_V\|_{L_\infty(0,T;\,E_s)} \le \delta$, удовлетворяющие (2). Задача (2) эквивалентна задаче на нахождение селектора дифференциального включения

$$\begin{gathered}
\dot{R}(t,u) \in \Gamma^\delta_R(R(t,u), V(t,u)),\\
\dot{V}(t,u) \in \Gamma^\delta_V(R(t,u), V(t,u)),
\end{gathered}$$

где множества Γ^δ_R, Γ^δ_V определяются по формулам $\Gamma^\delta_R(R, V) = \{i(UR' - U'R) + \delta_R(t, u)$: $\|\delta_R\|_{L_\infty(0,T;\,E_s)} \le \delta\}$, $\Gamma^\delta_V(R, V) = \{i(UV' - B'R) + g(R - 1) + \delta_V(t, u)$: $\|\delta_V\|_{L_\infty(0,T;\,E_s)} \le \delta\}$.

Т е о р е м а 1. *Пусть* R_0, $V_0 \in E_s$. *Для любого* $\delta > 0$ *существуют число* $T > 0$, *функции* R, $V \in M(A, C, s_1)$ *и функции* δ_R, $\delta_V \in L_\infty(0, T; E_s)$, *такие что* $\|\delta_R\|_{L_\infty(0,T;\,E_s)} \le \delta$, $\|\delta_V\|_{L_\infty(0,T;\,E_s)} \le \delta$, *удовлетворяющие* (2).

Поскольку уравнения (1), вообще говоря, не допускают глобальных по времени решений, то возникает важная проблема оценки времени существования решений этих уравнений. Введем числовую величину T_δ как точную верхнюю грань таких чисел $(0, \mathbb{T}]$, для которых существует решение задачи (2), где $\mathbb{T} > 0$ – некоторое наперед заданное число. Имеет место теорема, устанавливающая связь между задачей (2) и задачей (1).

Т е о р е м а 2. *Пусть* R_0, $V_0 \in E_s$. *Тогда* $T_\delta \to T_0$ *при* $\delta \to +0$, *где* T_0 *совпадает с точной верхней гранью таких чисел* $(0, \mathbb{T}]$, *для которых существует решение задачи* (1).

Автор выражает благодарность академику В.Е. Захарову за постановку задачи и внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта НШ-7550.2006.2 и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Математические методы в нелинейной динамике”, а также при поддержке гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования (Договор от 25 ноября 2010 г. № 11.G34.31.0035 между Минобрнауки России, НГУ и ведущим ученым).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Налимов В.И.* // Динамика сплошной среды. 1974. Т. 18. С. 104–210.
2. *Wu S.* // Invent. Math. 1997. V. 130. P. 39–72.
3. *Lannes D.* // Amer. Math. Soc. 2005. V. 18. № 3. P. 605–654.
4. *Шамин Р.В.* // ДАН. 2006. Т. 406. № 5. С. 112–113.
5. *Шамин Р.В.* Вычислительные эксперименты в моделировании поверхностных волн в океане. М.: Наука, 2008.
6. *Шамин Р.В.* // ДАН. 2008. Т. 418. № 5. С. 603–604.
7. *Захаров В.Е., Шамин Р.В.* // Письма в ЖЭТФ. 2010. Т. 91. В. 2. С. 68–71.
8. *Zakharov V.E., Dyachenko A.I., Prokofiev A.O.* // Europ. J. Mech. B Fluids. 2006. V. 25. P. 677–692.
9. *Chalikov D.* // Phys. Fluids. 2009. V. 21. Iss. 7.
10. *Zakharov V.E., Dyachenko A.I., Vasilyev O.A.* // Europ. J. Mech. B Fluids. 2002. V. 21. P. 283–291.
11. *Овсянников Л.В.* В сб.: Динамика сплошной среды. Новосибирск: СО АН СССР; Ин-т гидродинамики, 1973. В. 15. С. 104–125.
12. *Chalikov D., Sheinin D.* // Adv. Fluid. Mech. 1998. V. 17. P. 89–110.
13. *Дьяченко А.И., Захаров В.Е., Кузнецов Е.А.* // Физика плазмы. 1999. Т. 22. № 10. С. 916–928.