Математические заметки

том 66 выпуск 1 июль 1999

УДК 517.95.956.4, 517.929

ПЕРВАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

А. Л. Скубачевский, Р. В. Шамин

Рассматривается первая смешанная задача для параболического дифференциально-разностного уравнения со сдвигами по пространственным переменным. Доказаны однозначная разрешимость этой задачи и гладкость обобщенных решений в некоторых цилиндрических подобластях. Показано, что гладкость обобщенных решений может нарушаться на границах соседних подобластей.

Библиография: 7 названий.

Введение. Параболические функционально-дифференциальные уравнения возникают при исследовании нелинейных оптических систем с двумерной обратной связью [1]–[3]. В отличие от параболических дифференциальных уравнений эти уравнения обладают рядом принципиально новых свойств. Например, гладкость обобщенных решений может нарушаться внутри цилиндрической области даже при бесконечно гладкой правой части уравнения.

В настоящей работе рассматривается первая смешанная задача для параболического дифференциально-разностного уравнения со сдвигами по пространственным переменным. Доказаны однозначная разрешимость этой задачи и гладкость обобщенных решений в некоторых цилиндрических подобластях. Показано также, что гладкость обобщенных решений может нарушаться на границах соседних подобластей.

1. Постановка задачи. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial Q = \bigcup_i \overline{M_i}$ $(i = 1, \dots, N_\circ)$, где M_i – $(n-1)$-мерные многообразия класса C^∞, которые являются открытыми и связными в топологии ∂Q. Пусть в окрестности каждой точки $g \in \partial Q \setminus \bigcup_i M_i$ область Q – диффеоморфна n-мерному двугранному углу, если $n \geqslant 3$, и плоскому углу, если $n = 2$.

Мы будем обозначать через $W_2^k(Q)$ пространство Соболева комплекснозначных функций из $L_2(Q)$, имеющих все обобщенные производные вплоть до k-го порядка из $L_2(Q)$, с нормой

$$\|u\|_{W_2^k(Q)} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_Q |\mathcal{D}^\alpha u(x)|^2 \, dx \right\}^{1/2}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Конкурсного Центра по фундаментальным и естественным наукам при Санкт-Петербургском Государственном университете (№ 97-14.3-37).

Через $\mathring{W}_2^k(Q)$ обозначим замыкание множества финитных бесконечно дифференцируемых функций $\dot{C}^\infty(Q)$ в $W_2^k(Q)$, а через $W_2^{-1}(Q)$ обозначим пространство, сопряженное к $\mathring{W}_2^1(Q)$.

Введем ограниченный дифференциально-разностный оператор $A_R\colon \mathring{W}_2^1(Q) \to W_2^{-1}(Q)$ по формуле

$$A_R u = \sum_{i,j=1}^{n} (R_{ijQ} u_{x_j})_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} R_{iQ} u_{x_i} + R_{0Q} u. \tag{1.1}$$

Здесь $R_{ijQ} = P_Q R_{ij} I_Q,\ R_{iQ} = P_Q R_i I_Q$,

$$R_{ij} u(x) = \sum_{h\in M} a_{ijh}(x) u(x+h) \quad (i,j = 1,\dots,h),$$
$$R_i u(x) = \sum_{h\in M} a_{ih}(x) u(x+h) \quad (i = 0,1,\dots,n),$$

$M \subset \mathbb{R}^n$ – конечное множество векторов с целочисленными координатами, $a_{ijh},\ a_{ih} \in C^\infty(\overline{Q})$; $I_Q\colon L_2(Q) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ – оператор продолжения функции из $L_2(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^n\backslash Q$; $P_Q\colon L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(Q)$ – оператор сужения функции из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q.

Определение 1. Оператор $-A_R$ мы будем называть *сильно эллиптическим*, если существуют константы $c_1 > 0$ и $c_2 \geqslant 0$ такие, что для всех $u \in \dot{C}^\infty(Q)$

$$-\operatorname{Re}(A_R u, u)_{L_2(Q)} \geqslant c_1 \|u\|^2_{W_2^1(Q)} - c_2 \|u\|^2_{L_2(Q)}. \tag{1.2}$$

Необходимые и достаточные условия сильной эллиптичности в алгебраической форме будут сформулированы в конце этого пункта.

Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение

$$u_t(x,t) - A_R u(x,t) = f(x,t) \qquad \big((x,t) \in \Omega_T\big) \tag{1.3}$$

с краевым условием

$$u\big|_{\Gamma_T} = 0 \qquad \big((x,t) \in \Gamma_T\big) \tag{1.4}$$

и начальным условием

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x) \qquad (x \in Q), \tag{1.5}$$

где $\Omega_T = Q \times (0,T),\ \Gamma_T = \partial Q \times (0,T),\ 0 < T < \infty$.

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что оператор $-A_R$ – сильно эллиптический. В этом случае задачу (1.3)–(1.5) естественно называть первой смешанной задачей для параболического дифференциально-разностного уравнения. Не ограничивая общности, мы будем считать, что в неравенстве (1.2) $c_2 = 0$. Действительно, стандартная замена неизвестной функции $u = \exp(c_2 t) w$ сводит уравнение (1.3) к виду $(-A_R + c_2 I)w + w_t = \exp(-c_2 t) f(x,t)\ \ \big((x,t) \in \Omega_T\big)$.

Для того чтобы сформулировать условия сильной эллиптичности оператора $-A_R$, введем некоторые вспомогательные обозначения. Эти обозначения понадобятся нам также в п. 4 для исследования гладкости обобщенных решений задачи (1.3)–(1.5). Обозначим через G аддитивную абелеву группу, порожденную множеством M, а через Q_r открытые связные компоненты множества

$$Q\Big\backslash\Big(\bigcup_{h\in G}(\partial Q+h)\Big).$$

Определение 2. Множества Q_r мы будем называть *подобластями*, а совокупность $\mathcal{R}$ всевозможных подобластей Q_r – *разбиением* множества Q.

Разбиение $\mathcal{R}$ естественным образом распадается на непересекающиеся классы: будем считать, что подобласти $Q_{r_1},\ Q_{r_2}\in\mathcal{R}$ принадлежат одному классу, если существует $h\in G$ такое, что $Q_{r_2}=Q_{r_1}+h$. Обозначим подобласти Q_r через Q_{sl}, где s – номер класса ($s=1,2,\dots$), а l – порядковый номер подобласти в s-м классе. В силу ограниченности области Q каждый класс состоит из конечного числа $N=N(s)$ подобластей Q_{sl} и $N(s)\leqslant([\operatorname{diam}Q]+1)^n$.

Для того чтобы сформулировать необходимые условия сильной эллиптичности в алгебраической форме, мы введем матрицы $R_{ijs}(x)(x\in\overline{Q}_{s1})$ порядка $N(s)\times N(s)$ с элементами

$$r_{kl}^{ijs}(x)=\begin{cases} a_{ijh}(x+h_{sk}) & (h=h_{sl}-h_{sk}\in M),\\ 0 & (h_{sl}-h_{sk}\notin M).\end{cases}\tag{1.6}$$

В силу теоремы 9.1 из [3] если оператор $-A_R$ сильно эллиптический, то для всех $s=1,2,\dots,\ x\in\overline{Q}_{s1}$ и $0\ne\xi\in\mathbb{R}^n$ матрицы

$$\sum_{i,j=1}^{n}\big(R_{ijs}(x)+R_{ijs}^{*}(x)\big)\xi_i\xi_j$$

положительно определены.

Пусть теперь $x\in\overline{Q}_{s1}$ – произвольная точка. Рассмотрим все точки $x^l\in\overline{Q}$ такие, что $x^l-x\in G$. Поскольку область Q ограниченная, множество $\{x^l\}$ состоит из конечного числа точек $I=I(s,x)\ \ (I\geqslant N(s))$. Перенумеруем точки x^l так, что $x^l=x+h_{sl}$ для $l=1,\dots,N=N(s),\ x^1=x$, где h_{sl} удовлетворяет условию $Q_{sl}=Q_{s1}+h_{sl}$. Введем матрицы $A_{ijs}(x)$ порядка $I\times I$ с элементами $a_{lk}^{ijs}(x)$ по формуле

$$a_{lk}^{ijs}(x)=\begin{cases} a_{ijh}(x^l) & (h=x^k-x^l\in M),\\ 0 & (x^k-x^l\notin M).\end{cases}$$

В силу теоремы 9.2, из [3] если для всех $s=1,2,\dots,\ x\in\overline{Q}_{s1}$ и $0\ne\xi\in\mathbb{R}^n$ матрицы

$$\sum_{i,j=1}^{n}(A_{ijs}(x)+A_{ijs}^{*}(x))\xi_i\xi_j$$

положительно определены, то оператор $-A_R$ – сильно эллиптический.

Очевидно, если $I=N$, то матрица $R_{ijs}(x)$ равна матрице $A_{ijs}(x)$. Если $N<I$, то матрица $R_{ijs}(x)$ получается из матрицы A_{ijs} вычеркиванием последних $I-N$ строк и столбцов.

2. Существование и единственность обобщенного решения. Обозначим через $W_2^{k,0}(\Omega_T)$ пространство Соболева комплекснозначных функций $u \in L_2(\Omega_T)$, имеющих обобщенные производные $u_{x_i} \in L_2(\Omega_T)$ $(i = 1, \dots, n)$ с нормой

$$\|u\|_{W_2^{k,0}(\Omega_T)} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_{\Omega_T} |\mathcal{D}^\alpha u(x,t)|^2 \, dx \, dt + \int_{\Omega_T} |u(x,t)|^2 \, dx \, dt \right\}^{1/2}.$$

Положим $\mathcal{V} = L_2\big((0,T); \mathring{W}_2^1(Q)\big)$. Легко видеть, что $\mathcal{V} = \big\{v \in W_2^{1,0}(\Omega_T) : v\big|_{\Gamma_T} = 0\big\}$, а сопряженное пространство имеет вид $\mathcal{V}' = L_2\big((0,T); W_2^{-1}(Q)\big)$. Введем ограниченный оператор $L_R \colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ по формуле $L_R v(\,\cdot\,, t) = -A_R v(\,\cdot\,, t)$ для почти всех $t \in (0,T)$.

Введем также неограниченный оператор $\Lambda_t \colon \mathcal{V}' \supset D(\Lambda_t) \to \mathcal{V}'$, действующий в смысле распределений со значениями в $\mathcal{V}'$ по формуле $\Lambda_t v(\,\cdot\,, t) = \partial v(\,\cdot\,, t)/\partial t$ с областью определения $D(\Lambda_t) = \big\{v \in \mathcal{V}' : \Lambda_t v \in \mathcal{V}'\big\}$.

Отметим, что если функция $u \in \mathcal{V}$ удовлетворяет операторному уравнению

$$\Lambda_t u + L_R u = f, \tag{2.1}$$

где $f \in \mathcal{V}'$, то в силу теоремы 3.1 и предложения 2.1 из [4, гл. 1] $u \in C^0\big([0,T]; L_2(Q)\big)$. Поэтому $u\big|_{t=0}$ имеет смысл.

Пусть $f \in \mathcal{V}'$, $\varphi \in L_2(Q)$.

Определение 3. Будем называть функцию $u \in \mathcal{V} \cap D(\Lambda_t)$ *обобщенным решением задачи* (1.3)–(1.5), если она удовлетворяет операторному уравнению (2.1) и начальному условию (1.5).

Теорема 1. *Пусть дифференциально-разностный оператор $-A_R$ – сильно эллиптический. Тогда для любых $f \in \mathcal{V}'$ и $\varphi \in L_2(Q)$ задача* (1.3)–(1.5) *имеет единственное обобщенное решение $u \in \mathcal{V} \cap D(\Lambda_t)$.*

Доказательство. Очевидно, разностные операторы $R_{ijQ} \colon L_2(Q) \to L_2(Q)$ являются ограниченными. Следовательно, существует константа $c_0 > 0$ такая, что

$$\big|(A_R u, v)_{L_2(Q)}\big| \leqslant c_0 \|u\|_{W_2^1(Q)} \|v\|_{W_2^1(Q)} \tag{2.2}$$

для любых $u, v \in \dot{C}^\infty(Q)$. Из неравенств (1.2), (2.2) данной работы, а также из теоремы 4.1 и замечания 4.3 [4, гл. 3] вытекает существование и единственность обобщенного решения задачи (1.3)–(1.5).

Предположим теперь, что $f \in L_2(\Omega_T)$, $\varphi \in L_2(Q)$. В этом случае мы дадим определение обобщенного решения задачи (1.3)–(1.5) в смысле интегрального тождества.

Определение 4. Мы будем называть функцию $u \in \mathcal{V}$ *обобщенным решением задачи* (1.3)–(1.5), если для любых $v \in \big\{v \in W_2^1(\Omega_T) : v\big|_{\Gamma_T} = 0, v\big|_{t=T} = 0\big\}$ выполняется интегральное тождество

$$\int_{\Omega_T} \left(-u \overline{v}_t + \sum_{i,j=1}^n R_{ijQ} u_{x_j} \overline{v}_{x_i} \right) dx \, dt = \int_{\Omega_T} f \overline{v} \, dx \, dt + \int_Q \varphi \overline{v}\big|_{t=0} \, dx. \tag{2.3}$$

Теорема 2. *Пусть оператор* $-A_R$ *– сильно эллиптический и пусть* $f \in L_2(\Omega_T)$, $\varphi \in L_2(Q)$. *Тогда определения* 3 *и* 4 *эквивалентны.*

Доказательство. Эквивалентность определений 3, 4 будет следовать из теорем 4.1, 4.2, [4, гл. 3], если показать, что множество $\mathcal{V}_1 = \{v \in W_2^1(\Omega_T) : v\big|_{\Gamma_T} = 0,\ v\big|_{t=T} = 0\}$ всюду плотно в пространстве $\mathcal{V}_2 = \{v \in \mathcal{V} \cap D(\Lambda_t) : v\big|_{t=T} = 0\}$.

Действительно, пусть $v \in \mathcal{V}_2$. Рассмотрим последовательность вещественнозначных функций $\xi_n \in C^\infty[0,T]$ таких, что $\xi_n(t) = 1$ $(0 \leqslant t \leqslant T - 2/n)$, $\xi_n(t) = 0$ $(T - 1/n \leqslant t \leqslant T)$; $0 \leqslant \xi_n(t) \leqslant 1$, $|\xi_n'(t)| \leqslant Cn$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$. Очевидно, $\xi_n v \to v$ при $n \to \infty$ в пространстве $\mathcal{V}_2$. Сглаживая функции $\xi_n v$ по t, получим последовательность функций $v_n(t)$ со значениями в $\mathring{W}_2^1(Q)$, которые бесконечно дифференцируемы по t и имеют носители на $[0,T)$. По построению $v_n \to v$ в пространстве $\mathcal{V}_2$, при этом $v_n \in \mathcal{V}_1$.

3. Аналитические полугруппы.

Определение 5. Пусть X – банахово пространство. Однопараметрическое семейство линейных ограниченных операторов $T_t\colon X \to X$ $(t \geqslant 0)$ называется *сильно непрерывной полугруппой* или C_0*-полугруппой*, если

1) $T_0 = I$;
2) $T_{t+s} = T_t T_s$ $(t, s \geqslant 0)$;
3) $\lim_{t\searrow 0} T_t x = x$ (для любого $x \in X$).

Определение 6. Полугруппа класса C_0 называется *сжимающей*, если $\|T_t\| \leqslant 1$ $(t \geqslant 0)$.

Определение 7. Линейный оператор $A\colon X \supset D(A) \to X$, определенный по формуле

$$Ax = \lim_{t\searrow 0} \frac{T_t x - x}{t} \quad \left(x \in D(A) = \left\{x \in X : \lim_{t\searrow 0} \frac{T_t x - x}{t} \ \text{ существует}\right\}\right)$$

называется *инфинитезимальным производящим оператором сильно непрерывной полугруппы* $\{T_t\}$.

Введем неограниченный оператор $\mathcal{A}_R\colon L_2(Q) \supset D(\mathcal{A}_R) \to L_2(Q)$, действующий в пространстве распределений $D'(Q)$ по формуле $\mathcal{A}_R u = A_R u$ $(u \in D(\mathcal{A}_R) = \{u \in \mathring{W}_2^1(Q) : \mathcal{A}_R u \in L_2(Q)\})$.

Теорема 3. *Пусть оператор* $-A_R$ *– сильно эллиптический. Тогда оператор* $\mathcal{A}_R$ *является инфинитезимальным производящим оператором сжимающей полугруппы* T_t *в* $L_2(Q)$.

Доказательство. Из неравенства (1.2) с константой $c_2 = 0$ и теоремы 10.1 из [5] следует, что оператор $\mathcal{A}_R$ – замкнутый, а спектр $\sigma(\mathcal{A}_R) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$, при этом для любых $u \in D(\mathcal{A}_R)$

$$-\operatorname{Re}(\mathcal{A}_R u, u)_{L_2(Q)} \geqslant c_1 \|u\|^2_{W_2^1(Q)}. \tag{3.1}$$

Из (3.1) и неравенства Коши–Буняковского следует, что для $u \in D(\mathcal{A}_R)$ и $\lambda > 0$

$$\|(\lambda I - \mathcal{A}_R)u\|_{L_2(Q)}\|u\|_{L_2(Q)} \geqslant \lambda\|u\|^2_{L_2(Q)}.$$

Таким образом,

$$\|R(\lambda, \mathcal{A}_R)\| \leqslant \frac{1}{\lambda}.$$

Поэтому в силу теоремы Хилле–Иосиды (см., [6, § 1.3]) оператор $\mathcal{A}_R$ является инфинитезимальным производящим оператором сжимающей полугруппы T_t в $L_2(Q)$.

Обозначим $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2\}$, где $\varphi_1 < 0 < \varphi_2$.

Определение 8. Однопараметрическое семейство линейных ограниченных операторов $T_z\colon X \to X$ $(z \in \Delta)$ называется *аналитической полугруппой в* Δ, если

1) функция $z \to T_z$ является аналитической в Δ;

2) $T_0 = I$ и $\lim_{z\to 0, z\in\Delta} T_z x = x$ (для любого $x \in X$);

3) $T_{z_1+z_2} = T_{z_1}T_{z_2}$ (для любых $z_1,\ z_2 \in \Delta$).

Полугруппа T_t называется *аналитической*, если она аналитическая в некотором секторе Δ, содержащем положительную вещественную полуось.

Теорема 4. *Пусть оператор* $-A_R$ *– сильно эллиптический и, следовательно, оператор* $\mathcal{A}_R$ *является инфинитезимальным производящим оператором сжимающей полугруппы* T_t *в* $L_2(Q)$. *Тогда полугруппу* T_t *можно продолжить до аналитической полугруппы* T_z *в некотором секторе* $\Delta_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \delta\}$.

Доказательство проводится стандартными методами, основанными на использовании оценки нормы резольвенты инфинитезимального производящего оператора полугруппы. В свою очередь, указанная оценка выводится из неравенства типа Гординга (1.2) (см. теорему 2.7 из [6, § 7.2] или теорему 1 из, [7, гл. 14, § 1]).

4. Гладкость обобщенных решений.

Определение 9. Обобщенное решение задачи (1.3)–(1.5) при $f \in L_2(\Omega_T)$ и $\varphi \in L_2(Q)$ мы будем называть *сильным решением*, если $u_t \in L_2(\Omega_T)$.

Для исследования вопроса о гладкости обобщенных решений задачи (1.3)–(1.5) введем некоторые дополнительные обозначения. Рассмотрим множества

$$\mathcal{K} = \bigcup_{h_1,h_2\in G} \{\overline{Q} \cap (\partial Q + h_1) \cap \overline{[(\partial Q + h_2) \setminus (\partial Q + h_1)]}\},$$

а также

$$\mathcal{K}^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, \mathcal{K}) < \varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область. Обозначим через $W_2^{2k,k}\bigl(D \times (0,T)\bigr)$ пространство Соболева комплекснозначных функций из $L_2\bigl(D \times (0,T)\bigr)$, имеющих все обобщенные производные $\mathcal{D}_x^\alpha \mathcal{D}_t^\beta u \in L_2\bigl(D \times (0,T)\bigr)$ $(|\alpha| + 2\beta \leqslant 2k)$, с нормой

$$\|u\|_{W_2^{2k,k}(D\times(0,T))} = \left\{ \sum_{|\alpha|+2\beta\leqslant 2k} \int_{\Omega_T} |\mathcal{D}_x^\alpha \mathcal{D}_t^\beta u(x,t)|^2\, dx\, dt \right\}^{1/2}.$$

Теорема 5. *Пусть $\partial Q \setminus \bigcup_i M_i \subset \mathcal{K}$ и пусть дифференциально-разностный оператор $-A_R$ – сильно эллиптический. Тогда для любых $\varphi \in D(\mathcal{A}_R)$ и $f \in L_2(\Omega_T)$ таких, что $f_t \in L_2(\Omega_T)$, задача (1.3)–(1.5) имеет единственное сильное решение, которое определяется по формуле*

$$u(x,t) = T_t\varphi(x) + \int_0^t T_{t-s} f(x,s)\, ds. \tag{4.1}$$

Более того, для каждого $\varepsilon > 0$ и всех $s = 1, 2, \dots;\quad l = 1, \dots, N(s)\quad u(x,t) \in W_2^{2,1}((Q_{sl} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon) \times (0,T))$.

Доказательство. Существование и единственность решения задачи (1.3)–(1.5) и формула (4.1) следуют из теоремы 3 настоящей работы и следствия 2.10 из [6, § 4.2]. Из определения сильного решения и уравнения (1.3) следует, что

$$-A_R u(\,\cdot\,,t) = F(\,\cdot\,,t), \tag{4.2}$$

где $F(\,\cdot\,,t) = f(\,\cdot\,,t) - u_t(\,\cdot\,,t) \in L_2(Q)$ для почти всех $t \in (0,T)$. В силу теоремы 11.2 из [5] о гладкости обобщенных решений краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений для любого $\varepsilon > 0$

$$u(\,\cdot\,,t) \in W_2^2(Q_{sl} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon)$$

и

$$\|u\|_{W_2^2(Q_{sl}\setminus\mathcal{K}^\varepsilon)} \leqslant c\|F\|_{L_2(Q)} \tag{4.3}$$

для почти всех $t \in (0,T)$ и $s = 1, 2, \dots;\ l = 1, \dots, N(s)$, где $c > 0$ не зависит от t.

Возводя обе части неравенства (4.3) в квадрат и интегрируя от 0 до T, получим

$$\|u\|_{W_2^{2,0}((Q_{sl}\setminus\mathcal{K}^\varepsilon)\times(0,T))} \leqslant c_1\bigl(\|f\|_{L_2(\Omega_T)} + \|u_t\|_{L_2(\Omega_T)}\bigr).$$

Отсюда следует, что $u \in W_2^{2,1}((Q_{sl} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon) \times (0,T))$.

Замечание 1. При выполнении условий теоремы 5 в силу теорем 1, 5 обобщенное решение задачи (1.3)–(1.5) является сильным решением и, следовательно, принадлежит пространству $W_2^{2,1}\bigl((Q_{sl} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon) \times (0,T)\bigr)$.

Как показывает следующий пример, гладкость сильных решений задачи (1.3)–(1.5) может нарушаться на границе соседних цилиндров $Q_{s_1 l_1} \times (0,T)$ и $Q_{s_2 l_2} \times (0,T)$, а также вблизи множества $\mathcal{K} \times (0,T)$.

Пример 1. Рассмотрим первую смешанную задачу (1.3)–(1.5), предполагая, что $Q = (0,4/3)\times(0,4/3)$, $A_R = \Delta R_Q$, $R_Q = P_Q R I_Q$, $Ru(x) = u(x) + au(x_1+1, x_2+1) + au(x_1-1, x_2-1)$, $0 < a < 1$. Очевидно, разбиение $\mathcal{R}$ области Q состоит из двух классов подобластей: 1)$Q_{11} = (0,1/3)\times(0,1/3)$, $Q_{12} = (1,4/3)\times(1,4/3)$ и 2) $Q_{21} = Q\setminus(\overline{Q}_{11}\cup\overline{Q}_{12})$. Множество $\mathcal{K}$ принадлежит границе ∂Q и состоит из четырех точек: $g^1 = (1/3,0)$, $g^2 = (4/3,1)$, $g^3 = (0,1/3)$, $g^4 = (1,4/3)$.

Матрицы $A_s(x)(x\in\overline{Q}_{s1}; s=1,2)$, определенные по формуле (1.8), имеют вид

$$A_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \quad (x\in\overline{Q}_{11}),$$
$$A_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \quad (x\in\overline{Q}_{21}\cap\mathcal{K}), \qquad A_2(x) = (1) \quad (x\in\overline{Q}_{21}\setminus\mathcal{K}).$$

Таким образом, матрицы $A_s(x)(\xi_1^2+\xi_2^2)$ $(x\in\overline{Q}_{s1}; s=1,2)$ положительно определены (ср. (1.9)). Следовательно, оператор $-A_R$ – сильно эллиптический.

Положим

$$v_1(r,\varphi) = \xi(r)r^\lambda \sin\lambda\varphi, \qquad v_2(r,\varphi) = \xi(r)r^\lambda \sin\lambda\varphi\left(\frac{3\pi}{2}-\varphi\right),$$

где $\xi(r)\in\dot{C}^\infty(\mathbb{R})$, $0\leqslant\xi(r)\leqslant 1$, $\xi(r) = 1$ при $r\leqslant 1/8$, $\xi(r) = 0$ при $r\geqslant 1/6$, $\lambda = (2/\pi)\arccos(a/2)$, r,φ – полярные координаты.

Введем функцию $v(x)$ по формуле

$$v(x) = \begin{cases} \dfrac{v_1(x_1-1/3, x_2) - av_2(x_1-1/3, x_2)}{1-a^2}, & x\in Q_{11}, \\ \dfrac{-av_1(x_1-4/3, x_2-1) + v_2(x_1-4/3, x_2-1)}{1-a^2}, & x\in Q_{12}, \\ v_1(x_1-1/3, x_2) + v_2(x_1-4/3, x_2-1), & x\in Q_{21}. \end{cases} \tag{4.4}$$

Очевидно,

$$R_Q v(x) = v_1\left(x_1-\frac{1}{3}, x_2\right) + v_2\left(x_1-\frac{4}{3}, x_2-1\right).$$

Поскольку $0<\lambda<1$, легко видеть, что $v\in\overset{\circ}{W}{}_2^1$, $-\Delta R_Q v\in L_2(Q)$, но $v\notin W_2^2\big(Q_{s1}\cap S_\delta(g^1)\big)$ для любого $\delta>0$. Следовательно, функция $u(x,t) = tv(x)$ является сильным решением задачи (1.3)–(1.5) для $f(x,t) = v(x) - t\Delta R_Q v(x)\in L_2(\Omega_T)$ и $\varphi(x) = 0$. Однако, $u\notin W_2^{2,0}\big((Q_{s1}\cap S_\delta(g^1)\big)\times(0,T))$ для любого $\delta>0$. Таким образом, при $\varepsilon = 0$ теорема 5, вообще говоря, не верна.

Покажем теперь, что

$$u_{x_1}\big|_{x_1=1/3+0,\, x_2\leqslant 1/8} \ne u_{x_1}\big|_{x_1=1/3-0,\, x_2\leqslant 1/8}.$$

В силу (4.4) для этого достаточно убедиться, что

$$v_{1\varphi}\big|_{\varphi=\pi/2,\, r\leqslant 1/8} \neq \frac{1}{1-a^2}\Big\{v_{1\varphi}\big|_{\varphi=\pi/2,\, r\leqslant 1/8} - a v_{2\varphi}\big|_{\varphi=\pi/2,\, r\leqslant 1/8}\Big\}. \tag{4.5}$$

Соотношение (4.5) эквивалентно следующему

$$\lambda\cos\frac{\lambda\pi}{2} \neq \frac{1}{1-a^2}\left(\lambda\cos\lambda\frac{\pi}{2} - \lambda\cos\lambda\pi\right). \tag{4.6}$$

Приводя подобные и используя равенство $\cos(\lambda\pi/2) = a/2$, мы можем переписать (4.6) в виде

$$a^3 - a^2 + 2 \neq 0. \tag{4.7}$$

Поскольку корни уравнения $a^3 - a^2 + 2 = 0$ имеют вид $a_{1,2} = 1 \pm i$, $a_3 = -1$, условие (4.7) выполняется при $0 < a < 1$. Поэтому $u \notin W_2^{2,0}(S_\sigma(y))$ для любых $y = (y_1, y_2)$ и $\sigma > 0$ таких, что $y_1 = 1/3$, $0 < y_2 < 1/8$, $\sigma < y_2$. Таким образом, гладкость сильных решений задачи (1.3)–(1.5) может нарушаться на границе соседних подобластей $Q_{s_1 l_1} \times (0, T)$ и $Q_{s_2 l_2} \times (0, T)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Vorontsov M. A., Ricklin J. C., Carhart G. W. Optical simulation of phase-distorted imaging systems: nonlinear and adaptive optics approach // Optical Engineering. 1995. V. 34. № 11. P. 3229–3238.

[2] Скубачевский А. Л. О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных уравнений // УМН. 1996. Т. 51. № 1. С. 169–170.

[3] Skubachevskii A. L. Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics // Nonlinear Anal. 1998. V. 32. № 2. P. 261–278.

[4] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.

[5] Skubachevskii A. L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Basel–Boston–Berlin: Birkhauser, 1997.

[6] Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. New York–Berlin–Heidelberg: Springer, 1983.

[7] Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.

Московский государственный авиационный институт

Поступило
20.07.98

.tex