Министерство образования Российской Федерации

Московский государственный авиационный институт

(технический университет)

На правах рукописи

Шамин Роман Вячеславович

Нелокальные параболические задачи

Специальность 01.01.02 — Дифференциальные уравнения

Диссертация на соискание ученой степени кандидата

физико-математических наук

Научный руководитель — доктор физ.-мат. наук,

профессор А.Л. Скубачевский

Москва — 2002

Оглавление

0.1 Введение 4

1 Параболические функционально-дифференциальные уравнения. 12

1.1 Существование и единственность обобщенных решений. . . 12

1.2 Сильная разрешимость. 16

1.3 Пространства начальных данных для параболических операторно-дифференциальных уравнений. 21

1.4 Примеры параболических функционально-дифференциальных уравнений. 28

2 Параболические нелокальные задачи. 36

2.1 Нелокальные условия без подхода носителей нелокальных членов к границе. 36

2.2 Нелокальные условия в цилиндре. 41

2.3 Параболические задачи с нелокальными условиями на сдвигах границы. 45

3 Гладкость решений нелокальных параболических задач. 57

3.1 Гладкость решений параболических задач с нелокальными условиями без подхода носителей нелокальных членов к границе. 57

3.2 Гладкость решений параболических задач с нелокальными условиями на сдвигах границы. 59

3.3 Гладкость решений параболических дифференциально-разностных уравнений. 75

Список литературы 84

0.1 Введение

1. В настоящей диссертации изучаются два вида нелокальных задач: первая смешанная задача для параболических функционально-дифференциальных уравнений и параболические уравнения с нелокальными краевыми условиями.

Основы общей теории краевых задач для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и эллиптических уравнений с нелокальными краевыми условиями были созданы в работах А.Л. Скубачевского [10] - [13], [32]. Были получены необходимые и достаточные условия выполнения неравенства типа Гординга, исследованы вопросы однозначной, фредгольмовой и нетеровой разрешимости в пространствах Соболева и в весовых пространствах, а также гладкости обобщенных решений. Наиболее полное изложение теории эллиптических краевых задач для дифференциально-разностных уравнений и обширную библиографию можно найти в [31].

Параболические функционально-дифференциальные уравнения, содержащие преобразование по временной переменной рассматривались в работах [2]–[4], [25], [39], [23], [24], [22] и др.

Параболические функционально-дифференциальные уравнения, изучаемые в настоящей диссертации, содержат преобразование пространственной переменной. Изучение таких уравнений мотивируется различными приложениями.

Если рассмотреть нелинейную оптическую систему с преобразованием поля в двумерной обратной связи, то такое преобразование может приводить к возникновению так называемых “многолепестковых волн” [37] – [38]. Такие системы используются в исследовании лазерных пучков и в современной компьютерной технологии.

Математическая модель указанной системы описывается бифуркацией периодических решений квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения с преобразованием пространственных переменных $g(x)$. В работе [27] эта задача рассматривалась в случае, когда область Q — круг или кольцо, а преобразование g — вращение на некоторый угол θ. Случай произвольной области Q и произвольного преодразования $g(x)$ изучался в работах [33], [34].

Эллиптические и параболические задачи с нелокальными условиями возникают также в теории плазмы [1], [31].

2. В диссертации впервые рассматривается смешанная задача для параболических функционально-дифференциальных уравнений с преобразованием пространственных переменных в старших членах. В отличие от параболических дифференциальных уравнений, эти уравнения обладают рядом принципиально новых свойств. Например, гладкость обобщенных решений может нарушаться внутри цилиндрической области даже при бесконечно гладкой правой части уравнения. Для таких уравнений доказана однозначная разрешимость и исследована гладкость сильных решений для дифференциально-разностных уравнений параболического типа. При этом, новым является метод исследования гладкости в цилиндрических подобластях. Этот метод показывает, что сильные решения дифференциально-разностных уравнений могут иметь степенные особенности внутри области и на границе области. При этом, сильные решения принадлежат определенным весовым пространствам. Этот метод применим и в случае касательного подхода носителей нелокальных членов к границе, а также в многомерном случае.

Дано конструктивное описание пространств начальных данных для параболических функционально-дифференциальных уравнений. Новым является абстрактный метод, с помощью которого пространства начальных данных описываются в терминах пространств Соболева.

Впервые рассматриваются постановки параболических задач с нелокальными условиями по пространственным переменным. Для таких задач доказаны существование и единственность сильных решений и исследована гладкость сильных решений.

Для задач с нелокальными условиями на сдвигах границы дано описание пространств начальных данных. Для таких задач показано, что сильные решения могут иметь степенные особенности на границе области. При этом, сильные решения принадлежат соответствующим весовым пространствам.

3. Первая глава диссертации посвящена параболическим функционально-дифференциальным уравнениям.

В § 1.1 вводится постановка первой смешанной задачи для функционально-дифференциального уравнения параболического типа в случае абстрактного функционального оператора. Даны определения обобщенного решения в операторной форме и в смысле интегрального тождества. Доказана эквивалентность этих решений для регулярной правой части уравнения. Доказаны существование и единственность обобщенного решения.

В § 1.2 рассматриваются сильные решения параболических функционально-дифференциальных уравнений. Для исследования сильной разрешимости применяется метод полугрупп. Показано, что оператор, соответствующий эллиптической части уравнения является генератором аналитической полугруппы. Методами теории полугрупп доказана однозначная сильная разрешимость первой смешанной задачи для параболического функционально-дифференциального уравнения.

В § 1.3 рассматриваются пространства начальных данных для функционально-дифференциальных уравнений. Пространства начальных данных определяют класс начальных функций для которых существуют сильные решения. В виду специфики функционально-дифференциальных уравнений, в частности нарушение гладкости сильных решений, исследование пространств начальных данных представляет сложность и невозможно известными методами ([16], [7]). Для получения описания пространств начальных данных в § 1.3 доказывается абстрактная теорема об интерполяции области определения генератора аналитической полугруппы. Приведены условия на функциональные операторы, для которых можно дать описание пространств начальных данных в терминах пространств Соболева.

В § 1.4 приведены примеры конкретных функционально-дифференциальных уравнений параболического типа. Рассмотрены важные случаи дифференциально-разностных уравнений и функционально-дифференциальных уравнений с растяжением и сжатием аргумента. Для этих примеров, применены результаты §§ 1.1–1.3.

Во второй главе изучаются параболические уравнения с нелокальными условиями.

В § 2.1 рассматриваются параболические уравнения с нелокальными условиями без подхода носителей нелокальных членов к границе. Показано, что соответствующий эллиптический оператор с нелокальными краевыми условиями является генератором аналитической полугруппы. Доказана однозначная сильная разрешимость параболических уравнения с нелокальными условиями без подхода носителей нелокальных членов к границе.

В § 2.2 рассматриваются параболические уравнения с нелокальными условиями в цилиндре. Показано, что соответствующий эллиптический оператор с нелокальными краевыми условиями является генератором аналитической полугруппы. Доказана однозначная сильная разрешимость параболических уравнения с нелокальными условиями в цилиндре.

В § 2.3 изучаются параболические задачи с нелокальными условиями на сдвигах границы. Используя тесную связь между такими нелокальными условиями и разностными операторами, исходное параболическое уравнение сводится к определенному эволюционному функционально-дифференциальному уравнению. К полученному эволюционному функционально-дифференциальному уравнению применяются методы теории полугрупп. Доказана однозначная сильная разрешимость параболических задач с нелокальными условиями на сдвигах границы. Получено описание пространств начальных данных для таких задач.

Третья глава посвящена исследованию гладкости сильных решений параболических функционально-дифференциальных уравнений и параболических задач с нелокальными условиями.

В § 3.1 исследуется гладкость сильных решений параболических задач с нелокальными условиями без подхода носителей нелокальных членов к границе. В [31] показано, что гладкость обобщенных решений эллиптических задач с такими нелокальными условиями сохраняется вплоть до границы области. В § 3.1 этот результат обобщен и для сильных решений параболических задач с нелокальными услоиями без подхода носителей нелокальных членов к границе. Аналогичные результаты и получены и для параболических задач с нелокальными условиями в цилиндре.

В § 3.2 рассматривается гладкость сильных решений параболических задач с нелокальными условиями на сдвигах границы. Вначале исследуется гладкость обобщенных решений эллиптических нелокальных задач на сдвигах границы. Вводятся специальные весовые пространства в зависимости от области и нелокальных условий. Доказывается принадлежность обобщенных решений эллиптических задач этим пространствам. Используя стандартную для диссертации технику исследования гладкости сильных решений параболических задач, показано, что сильные решения могут иметь степенные особенности на границе области и принадлежат соответствующим весовым пространствам.

В § 3.3 рассматривается гладкость сильных решений для параболических дифференциально-разностных уравнений. Такие задачи рассмтривались в § 1.4. Функционально-дифференциальные уравнения этого типа обладают рядом принципиально новых свойств в части нарушения гладкости сильных решений на границе и внутри области. Как показано в [31] краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений тесно связаны с эллиптическими уравнениями с нелокальными условиями на сдвигах границы. В § 3.3 эта идея реализована для параболических задач. Используя полученные в § 3.2 результаты о гладкости сильных решений параболических задач с нелокальными условиями на сдвигах границы, доказывается, что сильные решения принадлежат соответствующим весовым пространствам.

4. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [14], [35], [15], [19], [28], [20], [29], [36], [30].

Результаты диссертационной работы докладывались на семинаре в Математическом институте им. В.А.Стеклова РАН под руководством академиков РАН С.М.Никольского и Л.Д.Кудрявцева; на семинаре кафедры общей математики факультета ВМиК МГУ под руководством чл.-корр. РАН Е.И.Моисеева; на семинарах механико-математического факультета МГУ под руководством В.А.Кондратьева и семинаре под руководством А.В.Седлецкого и В.В.Власова; на семинаре в Московском государственном авиационном институте под руководством Г.А.Каменского и А.Л.Скубачевского.

Результаты диссертационной работы докладывались также на международных конференциях: "Differential Equations and Related Topics", посвященной 100-летию И.Г.Петровского, МГУ, Москва, 2001; "Differential and Functional-Differential Equations", Москва, 1999; "Воронежской зимней математической школы 2000", Воронеж, 2000; Конференции, посвященной 80-летию А.Д.Мышкиса, Воронеж, 2000; "Nonlinear partial differential equations", Киев, 2001; Конференции по функциональному анализу, Киев, 2001; Крымских осенних математических школах-симпозиумах, Симферополь, 1997, 1998, 2001.

Глава 1

Параболические функционально-дифференциальные уравнения.

1.1 Существование и единственность обобщенных решений.

Условие 1.1 *Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial Q = \bigcup\limits_i \overline{M_i}$ $(i = 1, ..., N_0)$, где M_i — (n-1)-мерные многообразия класса C^∞, которые являются открытыми и связными в топологии ∂Q. Пусть в окрестности каждой точки $g \in \partial Q \setminus \bigcup\limits_i M_i$ область Q — диффеоморфна n-мерному двугранному углу, если $n \geq 3$, и плоскому углу, если $n = 2$.*

Мы будем обозначать через $H^k(Q)$ пространство Соболева комплекснозначных функций из $L_2(Q)$, имеющих все обобщенные производные вплоть до k-го порядка из $L_2(Q)$, с нормой

$$\|u\|_{H^k(Q)} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq k} \int\limits_Q |\mathcal{D}^\alpha u(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Через $\mathring{H}^k(Q)$ обозначим замыкание множества финитных бесконечно дифференцируемых функций $\dot{C}^\infty(Q)$ в $H^k(Q)$, а через $H^{-1}(Q)$ обозначим пространство, сопряженное к $\mathring{H}^1(Q)$.

Введем ограниченный операторно-дифференциальный оператор $\mathrm{A_B} : \mathring{H}^1(Q) \to H^{-1}(Q)$ по формуле

$$\mathrm{A_B}u = -\sum_{i,j=1}^{n} (\mathrm{B}_{ij}u_{x_j})_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{B}_i u_{x_i} + \mathrm{B}_0 u,$$

где B_{ij} $(i,j = 1,\dots,n)$, B_i $(i = 0,\dots,n)$ — ограниченные операторы в $L_2(Q)$.

Для $u \in \mathring{H}^1(Q)$ и $f \in H^{-1}(Q)$ через $\langle f, u\rangle$ будем обозначать значение функционала f на элементе u.

Определение 1.1 *Оператор* $\mathrm{A_B}$ *мы будем называть сильно эллиптическим, если существуют константы* $c_1 > 0$ *и* $c_2 \geq 0$ *такие, что для всех* $u \in \dot{C}^\infty(Q)$

$$\mathrm{Re}\langle \mathrm{A_B}u, u\rangle \geq c_1\|u\|^2_{H^1(Q)} - c_2\|u\|^2_{L_2(Q)}. \tag{1.1}$$

В § 1.4 будут приведены примеры сильно эллиптических операторов $\mathrm{A_B}$ для различных операторов B_{ij} $(i,j = 1,\dots,n)$, B_i $(i = 0,\dots,n)$.

Рассмотрим операторно-дифференциальное уравнение

$$u_t(x,t) + \mathrm{A_B}u(x,t) = f(x,t) \qquad ((x,t) \in Q_T) \tag{1.2}$$

с краевым условием

$$u|_{\Gamma_T} = 0 \qquad ((x,t) \in \Gamma_T) \tag{1.3}$$

и начальным условием

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \qquad (x \in Q), \tag{1.4}$$

где $Q_T = Q \times (0,T)$, $\Gamma_T = \partial Q \times (0,T)$, $0 < T < \infty$.

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что оператор $\mathrm{A_B}$ — сильно эллиптический. В этом случае задачу (1.2)–(1.4) естественно называть первой смешанной задачей для параболического функционально-дифференциального уравнения. Не ограничивая общности, мы будем считать, что $c_2 = 0$ в неравенстве (1.1). Действительно, стандартная замена неизвестной функции $u = exp(c_2 t)w$ сводит уравнение (1.2) к виду $(\mathrm{A_B} + c_2 I)w + w_t = exp(-c_2 t)f(x,t) \quad ((x,t) \in Q_T)$.

Обозначим через $H^{k,0}(Q_T)$ анизотропное пространство Соболева комплекснозначных функций $u \in L_2(Q_T)$, имеющих обобщенные производные по пространственным переменным $\mathcal{D}_x^\alpha u \in L_2(Q_T)$, $|\alpha| \le k$ с нормой

$$\|u\|_{H^{k,0}(Q_T)} = \left\{ \sum_{|\alpha|\le k} \int\limits_{Q_T} |\mathcal{D}_x^\alpha u(x,t)|^2 dxdt + \int\limits_{Q_T} |u(x,t)|^2 dxdt \right\}^{1/2}.$$

Положим $\mathcal{V} = L_2((0,T); \mathring{H}^1(Q))$. Легко видеть, что $\mathcal{V} = \{v \in H^{1,0}(Q_T) : v|_{\Gamma_T} = 0\}$, а сопряженное пространство имеет вид $\mathcal{V}' = L_2((0,T); H^{-1}(Q))$. Введем ограниченный оператор $L_B : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ по формуле $L_B v(\cdot,t) = \mathrm{A_B} v(\cdot,t)$ для почти всех $t \in (0,T)$.

Введем также неограниченный оператор $\Lambda_t : \mathcal{D}(\Lambda_t) \subset \mathcal{V}' \to \mathcal{V}'$, действующий в смысле распределений со значениями в $\mathcal{V}'$ по формуле $\Lambda_t v(\cdot,t) = \frac{\partial v(\cdot,t)}{\partial t}$ с областью определения $\mathcal{D}(\Lambda_t) = \{v \in \mathcal{V}' : \Lambda_t v \in \mathcal{V}'\}$.

Отметим, что, если функция $u \in \mathcal{V}$ удовлетворяет операторному уравнению

$$\Lambda_t u + L_R u = f, \tag{1.5}$$

где $f \in \mathcal{V}'$, то в силу теоремы 3.1 и предложения 2.1, гл. 1, [8] $u \in C^0([0,T]; L_2(Q))$. Поэтому $u|_{t=0}$ имеет смысл.

Пусть $f \in \mathcal{V}'$, $\varphi \in L_2(Q)$.

Определение 1.2 *Будем называть функцию $u \in \mathcal{V} \cap \mathcal{D}(\Lambda_t)$ обобщенным решением задачи (1.2)–(1.4), если она удовлетворяет операторному уравнению (1.5) и начальному условию (1.4).*

Теорема 1.1 *Пусть операторно-дифференциальный оператор $\mathrm{A_B}$ — сильно эллиптический. Тогда для любых $f \in \mathcal{V}'$ и $\varphi \in L_2(Q)$ задача (1.2)–(1.4) имеет единственное обобщенное решение $u \in \mathcal{V} \cap \mathcal{D}(\Lambda_t)$.*

Доказательство. Поскольку операторы $\mathrm{B}_{ij} : L_2(Q) \to L_2(Q)$ являются ограниченными, то существует константа $c_3 > 0$ такая, что

$$|\langle \mathrm{A_B} u, v\rangle| \le \sum_{i,j=1}^{n} |(\mathrm{B}_{ij} u_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(Q)}| + \sum_{i=1}^{n} |(\mathrm{B}_i u_{x_i}, v)_{L_2(Q)}| + |(\mathrm{B}_0 u, v)_{L_2(Q)}| \le c_3 \|u\|_{H^1(Q)} \|v\|_{H^1(Q)} \tag{1.6}$$

для любых $u, v \in \dot{C}^\infty(Q)$. Из неравенств (1.1), (1.6) данной главы, а также из теоремы 4.1 и замечания 4.3, гл. 3, [8] вытекает существование и единственность обобщенного решения задачи (1.2)–(1.4). ■

Предположим теперь, что $f \in L_2(Q_T)$, $\varphi \in L_2(Q)$. В этом случае мы дадим определение обобщенного решения задачи (1.2)–(1.4) в смысле интегрального тождества.

Определение 1.3 *Мы будем называть функцию* $u \in \mathcal{V}$ *обобщенным решением задачи (1.2)–(1.4), если для любых* $v \in \{v \in H^1(Q_T) : v|_{\Gamma_T} = 0,\ v|_{t=T} = 0\}$ *выполняется интегральное тождество*

$$\int\limits_{Q_T} (-u\overline{v}_t + \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{B}_{ij} u_{x_j} \overline{v}_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} B_i u_{x_i} \overline{v}) dx dt = \int\limits_{Q_T} f \overline{v} dx dt + \int\limits_{Q} \varphi \overline{v}|_{t=0} dx. \quad (1.7)$$

Теорема 1.2 *Пусть оператор* $\mathrm{A_B}$ *— сильно эллиптический, и пусть* $f \in L_2(Q_T)$, $\varphi \in L_2(Q)$. *Тогда определения 1.2 и 1.3 эквивалентны.*

Доказательство. Эквивалентность определений 1.2 и 1.3 будет следовать из теорем 4.1, 4.2, гл. 3, [8], если показать, что множество $\mathcal{V}_1 = \{v \in H^1(Q_T) : v|_{\Gamma_T} = 0,\ v|_{t=T} = 0\}$ всюду плотно в пространстве $\mathcal{V}_2 = \{v \in \mathcal{V} \cap \mathcal{D}(\Lambda_t) : v|_{t=T} = 0\}$.

Действительно, пусть $v \in \mathcal{V}_2$. Рассмотрим последовательность вещественнозначных функций $\xi_n \in C^\infty[0,T]$ таких, что $\xi_n(t) = 1$ $(0 \le t \le T - 2/n)$, $\xi_n(t) = 0$ $(T - 1/n \le t \le T)$; $0 \le \xi_n(t) \le 1$, $|\xi_n'(t)| \le Cn$ $(0 \le t \le T)$. Очевидно, $\xi_n v \to v$ при $n \to \infty$ в пространстве $\mathcal{V}_2$. Сглаживая функции $\xi_n v$ по t, получим последовательность функций $v_n(t)$ со значениями в $\mathring{H}^1(Q)$, которые бесконечно дифференцируемы по t и имеют носители на $[0,T)$. По построению $v_n \to v$ в пространстве $\mathcal{V}_2$, при этом $v_n \in \mathcal{V}_1$. ■

1.2 Сильная разрешимость.

В § 1.1 рассматривались обобщенные решения задачи (1.2)–(1.4). В настоящем параграфе мы исследуем сильную разрешимость задачи (1.2)–(1.4).

Введем неограниченный замкнутый оператор $\mathcal{A}_{\mathcal{B}} : \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$, действующий в пространстве распределений $\mathcal{D}'(Q)$ по формуле $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}u = \mathrm{A_B}u$ $(u \in D(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}) = \{u \in \mathring{H}^1(Q) : \mathrm{A_B}u \in L_2(Q)\})$. Поскольку оператор $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ замкнутый, то мы можем рассматривать гильбертово пространство $\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}})$ со скалярным произведением

$$(u, v)_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}})} = (\mathcal{A}_{\mathcal{B}}u, \mathcal{A}_{\mathcal{B}}v)_{L_2(Q)} + (u, v)_{L_2(Q)}$$

для $u, v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}})$.

Для замкнутого оператора $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ введем гильбертово пространство $\mathcal{W}(\mathcal{A}) = \{w \in L_2(0, T; \mathcal{D}(\mathcal{A})) : w' \in L_2(0, T; L_2(Q))\}$ со скалярным произведением

$$(u, v)_{\mathcal{W}(\mathcal{A})} = \int\limits_0^T (u', v')_{L_2(Q)}\, dt + \int\limits_0^T (\mathcal{A}u, \mathcal{A}v)_{L_2(Q)} dt + \int\limits_0^T (u, v)_{L_2(Q)} dt,$$

где производные по t понимаются в смысле распределений со значениями в $L_2(0, T; L_2(Q))$.

В силу теоремы 3.1, гл. 1, [8] функция $w \in \mathcal{W}(\mathcal{A})$ имеет след $w_{|t=0} \in L_2(Q)$.

Для $f \in L_2(Q_T)$ и $\varphi \in L_2(Q)$ мы дадим определение сильного решения задачи (1.2)–(1.4).

Определение 1.4 *Обобщенное решение u задачи (1.2)–(1.4) называется сильным если $u \in \mathcal{W}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}})$.*

Для исследования сильной разрешимости задачи (1.2)–(1.4) мы воспользуемся методами теории полугрупп.

Определение 1.5 *Пусть X — банахово пространство. Однопараметрическое семейство линейных ограниченных операторов $T_t : X \to X \quad (t \geq 0)$ называется сильно непрерывной полугруппой или C_0-полугруппой, если*

1) $T_0 = I$;

2) $T_{t+s} = T_t T_s \quad (t, s \geq 0)$;

3) $\lim\limits_{t \searrow 0} T_t x = x$ (для любого $x \in X$).

Определение 1.6 *Полугруппа класса C_0 называется сжимающей, если $\|T_t\| \leq 1$ $(t \geq 0)$.*

Определение 1.7 *Линейный оператор $\mathrm{G} : X \to X$, определенный по формуле*

$$\mathrm{G}x = \lim_{t \searrow 0} \frac{T_t x - x}{t} \quad \left(x \in D(\mathrm{G}) = \{x \in X : \lim_{t \searrow 0} \frac{T_t x - x}{t} \text{ существует}\}\right),$$

называется инфинитезимальным производящим оператором сильно непрерывной полугруппы $\{T_t\}$.

Обозначим $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2\}$, где $\varphi_1 < 0 < \varphi_2$.

Определение 1.8 *Однопараметрическое семейство линейных ограниченных операторов $T_z : X \to X \quad (z \in \Delta)$ называется аналитической полугруппой в Δ, если*

1) функция $z \to T_z$ является аналитической в Δ;

2) $T_0 = I$ и $\lim\limits_{z \to 0, z \in \Delta} T_z x = x$ (для любого $x \in X$);

3) $T_{z_1+z_2} = T_{z_1}T_{z_2}$ *(для любых* $z_1, z_2 \in \Delta$ *).*

Полугруппа T_t $(t \geq 0)$ *называется аналитической, если ее можно продолжить до аналитической в некотором секторе* Δ, *содержащем положительную вещественную полуось.*

Теорема 1.3 *Пусть оператор* $\mathrm{A_B}$ *— сильно эллиптический. Тогда оператор* $-\mathcal{A}_\mathcal{B}$ *является инфинитезимальным производящим оператором аналитической полугруппы* $\{T_t\}_{t\geq 0}$ *в* $L_2(Q)$*.*

Доказательство. Из неравенства (1.1) с константой $c_2 = 0$ следует, что для любых $u \in D(\mathcal{A}_\mathcal{B})$

$$\mathrm{Re}(\mathcal{A}_\mathcal{B}u, u)_{L_2(Q)} \geq c_1\|u\|^2_{H^1(Q)}. \tag{1.8}$$

Интегрируя по частям, для всех $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\mathcal{B})$ мы имеем

$$(\mathcal{A}_\mathcal{B}u, u)_{L_2(Q)} = \sum_{i,j=1}^{n}(\mathrm{B}_{ij}u_{x_j}, u_{x_i})_{L_2(Q)} + \sum_{i=1}^{n}(\mathrm{B}_i u_{x_i}, u)_{L_2(Q)} + (\mathrm{B}_0 u, u)_{L_2(Q)},$$

Отсюда получаем

$$|\,\mathrm{Im}(\mathcal{A}_\mathcal{B}u, u)_{L_2(Q)}| \leq |(\mathcal{A}_\mathcal{B}u, u)_{L_2(Q)}| \leq c_2\|u\|^2_{H^1(Q)}, \tag{1.9}$$

для некоторого $c_2 > 0$.

Из (1.8) и (1.9) следует, что числовая область значения $\Theta(\mathcal{A}_\mathcal{B})$ оператора $\mathcal{A}_\mathcal{B}$ лежит в секторе:

$$\Theta(\mathcal{A}_\mathcal{B}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : -\theta_1 < \arg\lambda < \theta_1\},$$

где $\theta_1 = \mathrm{arctg}(c_2/c_1) < \pi/2$.

В силу теоремы 1.24, гл. 9 [6], оператор $-\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ является инфинитезимальным производящим оператором аналитической полугруппы T_t в $L_2(Q)$. ■

Пусть X и Y — гильбертовы пространства. Пространство Y плотно и непрерывно вложено в пространство X. Для любых $t > 0$ и $\psi \in X$ определим функционал

$$\mathrm{K}(t,\psi;Y,X) = \inf_{\substack{\psi_0+\psi_1=\psi\\ \psi_0\in Y\\ \psi_1\in X}} (\|\psi_0\|_Y + t\|\psi_1\|_X).$$

Введем интерполяционное пространство следующим образом: $[Y;X]_{1/2} = \{\psi \in X : \int\limits_0^\infty t^{-2}\mathrm{K}^2(\mathrm{t},\psi;\mathrm{Y},\mathrm{X})\mathrm{dt} < \infty\}$.

Теорема 1.4 *Пусть оператор* $\mathrm{A_B}$ *— сильно эллиптический.*

Тогда задача (1.2)–(1.4) имеет единственное сильное решение $u \in \mathcal{W}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}})$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi \in [\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{R}}), L_2(Q)]_{1/2}$. *Более того, это решение представляется формулой*

$$u(x,t) = T_t\varphi(x) + \int\limits_0^t T_{t-s}f(x,s)ds, \tag{1.10}$$

где $\{T_t\}_{t\geq 0}$ *— аналитическая полугруппа, порожденная оператором* $-\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$.

Доказательство. При исследовании сильной разрешимости задачу (1.2)–(1.4) можно рассматривать как абстрактную задачу Коши для параболического уравнения в пространстве $L_2(Q)$. В силу теоремы 3.7, гл.

1, [21], задача (1.2)–(1.4) имеет единственное сильное решение, и справедлива формула (1.10) тогда и только тогда, когда справедливо следующее неравенство:

$$\int_0^T \|\mathcal{A}_{\mathcal{B}} T_t \varphi\|^2_{L_2(Q)} dt < \infty. \tag{1.11}$$

В силу теоремы 1.3 полугруппа аналитическая и сжимающая. Следовательно, из теоремы 1.14.5, гл. 1, [18] мы получаем, что неравенство (1.11) справедливо тогда и только тогда, когда $\varphi \in [\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}), L_2(Q)]_{1/2}$ ■

1.3 Пространства начальных данных для параболических операторно-дифференциальных уравнений.

В предыдущем параграфе мы получили необходимое и достаточное условие на начальную функцию φ для существования сильного решения задачи (1.2)–(1.4). Именно, пространством начальных данных для задачи (1.2)–(1.4) является пространство $[\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}); L_2(Q)]_{1/2}$. Однако в большинстве случаев для конкретных операторов $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ условие принадлежности начальной функции пространству $[\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}); L_2(Q)]_{1/2}$ является неконструктивным. В настоящем пункте мы приведем условия на операторы B_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$, при которых $[\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}); L_2(Q)]_{1/2} = \mathring{H}^1(Q)$.

Начнем с одного абстрактного результата.

Пусть V и H сепарабельные гильбертовы пространства, и V плотно и непрерывно в H вложено. Отождествим пространство H с его сопряженным, тогда мы получаем $V \subset H \subset V'$, где каждое пространство плотно в последующем.

Рассмотрим непрерывный оператор $\mathrm{A} : V \to V'$.

Определение 1.9 *Оператор* A *называется* V*-коэрцитивным, если для любого* $v \in V$

$$\mathrm{Re}\langle \mathrm{A}v, v\rangle \geq c_1\|v\|_V^2, \tag{1.12}$$

где $c_1 > 0$ *не зависит от* v.

В дальнейшем будем предполагать, что оператор A есть V-коэрцитивный. В силу теоремы 9.1, гл. 2 [8] оператор A взаимооднозначно и взаимонепрерывно отображает V на V'.

Введем замкнутый неограниченный оператор $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset H \to H$, где $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{u \in V : \mathrm{A}u \in H\}$. Оператор $\mathcal{A}$ есть сужение оператора A на $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ со скалярным произведением

$$(u, v)_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = (\mathcal{A}u, \mathcal{A}v)_H + (u, v)_H.$$

Рассмотрим оператор $\mathrm{A}^* : V \to V'$ как сопряженный к оператору A. Введем также неограниченный оператор $\mathcal{A}'$, определенный по формуле $\mathcal{A}'u = \mathrm{A}^*u$, где $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}') = \{u \in V : \mathrm{A}^*u \in H\}$.

Покажем, что для произвольного $u \in H$ форма $(\mathcal{A}w, u)_H$ определяет линейный непрерывный функционал $\langle w, f\rangle = (\mathcal{A}w, u)_H$ на $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Действительно,

$$\sup_{w\in\mathcal{D}(\mathcal{A})} \frac{|(\mathcal{A}w, u)_H|}{\|w\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}} \leq \sup_{w\in\mathcal{D}(\mathcal{A})} \frac{\|\mathcal{A}w\|_H\|u\|_H}{(\|\mathcal{A}w\|_H^2 + \|w\|_H^2)^{1/2}} \leq \|u\|_H.$$

В силу теоремы Рисса функционал f можно представить в виде $\mathrm{A}_0'u = f$, где оператор $\mathrm{A}_0' : H \to (\mathcal{D}(\mathcal{A}))'$ ограничен, т.к. $\|f\|_{(\mathcal{D}(\mathcal{A}))'} \le \|u\|_H$.

Теперь покажем, что $\mathcal{A}' \subset \mathrm{A}_0'$, т.е. $\mathrm{A}_0'u = \mathcal{A}^*u$ для $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}')$. Пусть $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}')$ и $w \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Обозначим $\mathrm{A}_0'u = f_1$ и $\mathcal{A}'u = f_2$. Тогда

$$\langle w, f_1\rangle = (\mathcal{A}w, u)_H = \langle \mathrm{A}w, u\rangle = \langle w, \mathrm{A}^*u\rangle = (w, \mathcal{A}'u)_H = \langle w, f_2\rangle.$$

В силу произвольности $w \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ мы имеем $\mathcal{A}'u = \mathrm{A}_0'u$ в $(\mathcal{D}(\mathcal{A}))'$, но $\mathcal{A}'u \in H$ и $H \subset (\mathcal{D}(\mathcal{A}))'$, следовательно, $\mathcal{A}'u = \mathrm{A}_0'u \in H$.

Оператор $\mathcal{A}'$ ограниченно отображает $\mathcal{D}(\mathcal{A}')$ в H. Следовательно, и $\mathrm{A}_0' : \mathcal{D}(\mathcal{A}') \to H$ ограничен.

В силу интерполяционной теоремы (теорема 5.1, гл. 1, [8]) оператор A_0' ограничен как оператор

$$\mathrm{A}_0' : [\mathcal{D}(\mathcal{A}'); H]_{1/2} \to [H; (\mathcal{D}(\mathcal{A}))']_{1/2}.$$

Однако, согласно теореме 6.2, гл. 1, [8] справедливо равенство

$$[H; (\mathcal{D}(\mathcal{A}))']_{1/2} = ([\mathcal{D}(\mathcal{A}); H]_{1/2})'.$$

Поэтому ограничен оператор

$$\mathrm{A}_0' : [\mathcal{D}(\mathcal{A}'); H]_{1/2} \to ([\mathcal{D}(\mathcal{A}); H]_{1/2})'. \tag{1.13}$$

Теорема 1.5 *Пусть оператор* A *является* V*-коэрцитивным. Если имеют место плотные и непрерывные вложения* $V \subset [\mathcal{D}(\mathcal{A}); H]_{1/2}$ *и* $V \subset [\mathcal{D}(\mathcal{A}'); H]_{1/2}$, *то* $V = [\mathcal{D}(\mathcal{A}); H]_{1/2}$.

Доказательство: Покажем, что $\mathrm{A}_0'u = \mathrm{A}^*u$, если $u \in V$. Возьмем $u \in V$ и $w \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Пусть $\mathrm{A}_0'u = f_1$ и $\mathrm{A}^*u = f_2$. Тогда

$$\langle w, f_1\rangle = (\mathcal{A}w, u)_H = \langle \mathrm{A}w, u\rangle = \langle w, \mathrm{A}^*u\rangle = \langle w, f_2\rangle.$$

В силу произвольности $w \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ мы получим равенство $\mathrm{A}^*u = \mathrm{A}_0'u$ в $(\mathcal{D}(\mathcal{A}))'$, но $\mathrm{A}^*u \in V'$ и $V' \subset (\mathcal{D}(\mathcal{A}))'$. Следовательно, $\mathrm{A}^*u = \mathrm{A}_0'u \in V'$.

Возьмем произвольное $f \in V'$. Тогда $u = (\mathrm{A}^*)^{-1}f \in V$ и

$$\|u\|_V \le c_2\|f\|_{V'}, \tag{1.14}$$

где $c_2 > 0$ от f не зависит. По предположению теоремы $u \in [\mathcal{D}(\mathcal{A}'); H]_{1/2}$ и

$$\|u\|_{[\mathcal{D}(\mathcal{A}');H]_{1/2}} \le c_3\|u\|_V, \tag{1.15}$$

где $c_3 > 0$ от f не зависит.

В силу (1.13) $\mathrm{A}_0'u = f \in ([\mathcal{D}(\mathcal{A}); H]_{1/2})'$. Учитывая (1.14), (1.15), получаем,

$$\|f\|_{([\mathcal{D}(\mathcal{A});H]_{1/2})'} \le c_4\|u\|_{[\mathcal{D}(\mathcal{A}');H]_{1/2}} \le c_4c_3\|u\|_V \le c_4c_3c_2\|f\|_{V'}.$$

Таким образом, имеет место непрерывное вложение $V' \subset ([\mathcal{D}(\mathcal{A}); H]_{1/2})'$. Однако в силу предположений теоремы $([\mathcal{D}(\mathcal{A}); H]_{1/2})'$ непрерывно вложено в V'. Это означает, что $V' = ([\mathcal{D}(\mathcal{A}); H]_{1/2})'$. Благодаря рефлексивности пространств, получаем $V = [\mathcal{D}(\mathcal{A}); H]_{1/2}$ с точностью до эквивалентности норм. ■

Применим теперь теорему 1.5 к оператору $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$. В качестве пространства H возьмем пространство $L_2(Q)$, за V примем пространство $\mathring{H}^1(Q)$, соответственно $V' = H^{-1}(Q)$.

В роли оператора A будет выступать оператор $\mathrm{A_B}$.

Замечание 1.1 *Сильно эллиптический оператор* $\mathrm{A_B}$ *с* $c_2 = 0$ *в неравенстве (1.1) является* $\mathring{H}^1(Q)$*-коерцитивным оператором.*

Замечание 1.2 *Если* $\mathrm{A} = \mathrm{A_B}$*, то* $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathcal{B}}$*.*

Относительно операторов B_{ij} $(i, j = 1, \dots, n)$ будем предполагать, что выполнены следующие условия.

Условие 1.2 *Операторы* B_{ij} $(i, j = 1, \dots, n)$ *ограниченно отображают пространство* $\mathring{H}^1(Q)$ *в пространство* $H^1(Q)$*.*

Условие 1.3 *Оператор* $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ *является сильно эллиптическим.*

Лемма 1.1 *Для области* Q*, удовлетворяющей условию 1.1, справедливо* $[\mathring{H}^2(Q); L_2(Q)]_{1/2} = \mathring{H}^1(Q)$*.*

Доказательство. Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 11.6, гл. 1, [8] и опирается на лемму 11.3, гл. 1, [8]. Мы должны только использовать теорему о продолжении функций для липшецевых областей, см. теорема 5, §3, гл. 6, [17]. ∎

Лемма 1.2 *Пусть для операторов* B_{ij} $(i, j = 1, \dots, n)$ *выполнено условие 1.2. Тогда пространство* $\mathring{H}^2(Q)$ *непрерывно вложено в* $\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}})$*.*

Доказательство. В предположении леммы операторы $\mathrm{B}_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}$ $(i, j = 1, \dots, n)$ отображают непрерывно $\mathring{H}^2(Q)$ в $H^1(Q)$. Следовательно, $\mathring{H}^2(Q) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_\mathcal{B})$, и оператор $\mathcal{A}_\mathcal{B}$ отображает непрерывно $\mathring{H}^2(Q)$ в $L_2(Q)$. ■

Теорема 1.6 *Пусть область Q удовлетворяет условию 1.1, и пусть операторы* B_{ij} $(i, j = 1, \dots, n)$ *удовлетворяют условиям 1.2 и 1.3, а операторы B^*_{ij} $(i, j = 1, \dots, n)$ удовлетворяют условию 1.2.*

Тогда $[\mathcal{D}(\mathcal{A}_\mathcal{B}); L_2(Q)]_{1/2} = \mathring{H}^1(Q)$ с точностью до эквивалентности норм.

Доказательство. Вначале заметим, что $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\mathcal{B})$ определяется только операторами B_{ij} $(i, j = 1, \dots, n)$ и не зависит от операторов B_i $(i = 0, \dots, n)$. Поэтому при доказательстве будем считать, что $\mathrm{B}_i = 0$ $(i = 0, \dots, n)$.

Заметим также, что из условия 1.3 для операторов B_{ij} $(i, j = 1, \dots, n)$ следует выполнение условия 1.3 для операторов B^*_{ij} $(i, j = 1, \dots, n)$. Сопряженным к оператору $\mathcal{A}_\mathcal{B}$ будет оператор $\mathcal{A}_{\mathcal{B}^*} = -\sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathrm{B}^*_{ji}\frac{\partial}{\partial x_j})$. Действительно, для любых $u, v \in \dot{C}^\infty(Q)$

$$(\mathcal{A}_\mathcal{B} u, v)_{L_2(Q)} = \sum_{i,j=1}^{n} (\mathrm{B}_{ij} u_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(Q)} = (u, \mathcal{A}_{\mathcal{B}^*} v)_{L_2(Q)}. \tag{1.16}$$

Поскольку $\dot{C}^\infty(Q)$ всюду плотно в $\mathring{H}^1(Q)$, тождества (1.16) справедливы для любых $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\mathcal{B})$, $v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}^*})$. Следовательно, $\mathcal{A}_{\mathcal{B}^*} \subset (\mathcal{A}_\mathcal{B})^*$ и $\mathcal{A}_\mathcal{B} \subset (\mathcal{A}_{\mathcal{B}^*})^*$. Так как в силу сильной эллиптичности операторов $\mathcal{A}_\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}_{\mathcal{B}^*}$, $0 \notin \sigma(\mathcal{A}_\mathcal{B}) \cup \sigma(\mathcal{A}_{\mathcal{B}^*})$, то по лемме 13, §6, гл. 14, [5] о сопряженных операторах $(\mathcal{A}_\mathcal{B})^* = \mathcal{A}_{\mathcal{B}^*}$.

Покажем, что имеют место непрерывные вложения

$$\mathring{H}^1(Q) \subset [\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}); L_2(Q)]_{1/2}$$

и

$$\mathring{H}^1(Q) \subset [\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}^*}); L_2(Q)]_{1/2}.$$

В силу леммы 1.2 имеет место непрерывное вложение $\mathring{H}^2(Q) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}})$. Следовательно, имеет место оценка функции $K(t, \varphi; \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}), L_2(Q))$ при $t > 0$

$$K(t, \varphi; \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}), L_2(Q)) \leq K(t, \varphi; \mathring{H}^2(Q), L_2(Q)).$$

Поэтому, если $t^{-1}K(t, \varphi; \mathring{H}^2(Q), L_2(Q)) \in L_2(0, \infty)$, то и $t^{-1}K(t, \varphi; \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}), L_2(Q)) \in L_2(0, \infty)$. Следовательно, $[\mathring{H}^2(Q), L_2(Q)]_{1/2} \subset [\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{R}}); L_2(Q)]_{1/2}$. В то же время, по лемме 1.1 имеет место $[\mathring{H}^2(Q), L_2(Q)]_{1/2} = \mathring{H}^1(Q)$.

Аналогичные рассуждения применимы и для пространства $\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}^*})$.

Применяя теорему 1.5, получаем равенство $[\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}); L_2(Q)]_{1/2} = \mathring{H}^1(Q)$.

■

В силу теоремы 1.6 можно переформулировать теорему 1.4 следующим образом.

Теорема 1.7 *Пусть область Q удовлетворяет условию 1.1, и пусть операторы* B_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ *удовлетворяют условиям 1.2 и 1.3, а операторы B^*_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ удовлетворяют условию 1.2.*

Тогда задача (1.2)–(1.4) имеет единственное сильное решение $u \in \mathcal{W}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}})$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathring{H}^1(Q)$. Более того, это реше-

ние представляется формулой

$$u(x,t) = T_t\varphi(x) + \int_0^t T_{t-s} f(x,s)ds,$$

где $\{T_t\}_{t\geq 0}$ — *аналитическая полугруппа, порожденная оператором* $-\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$.

1.4 Примеры параболических функционально-дифференциальных уравнений.

В предыдущем параграфе мы получили условия на операторы B_{ij} $(i,j = 1,\dots,n)$, для сильной разрешимости задачи (1.2)–(1.4). В настоящем параграфе мы приведем примеры операторов B_{ij}, которые удовлетворяют условиям 1.2 и 1.3.

Применим теорему 1.7 к уравнению теплопроводности в негладких областях.

Пример 1.1

Пусть $\mathrm{B}_{ij} = \delta_{ij}$ $(i,j = 1,\dots,n)$, $\mathrm{B}_i = 0$ $(i = 0,\dots,n)$, где $\delta_{ii} = 1$ $(i = 1,\dots,n)$, $\delta_{ij} = 0$, $i \neq j$ $(i,j = 1,\dots,n)$.

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t), \quad ((x,t) \in Q_T) \tag{1.17}$$

с краевым условием

$$u_{|\Gamma_T} = 0 \tag{1.18}$$

и начальным условием

$$u_{|t=0} = \varphi(x) \quad (x \in Q). \tag{1.19}$$

В случаи гладкой границы области Q задача (1.17)–(1.19) имеет сильное решение тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathring{H}^1(Q)$, при этом сильное решение $u \in H_2^{2,1}(Q_T)$ (см. теорему 8, гл. 3, [16] и теорему 6.1, гл. 3, [7]).

Если граница области Q удовлетворяет лишь условию 1.1, т.е. допускает угловые точки и ребра, то сильные решения могут не иметь обобщенных производных второго порядка по x, принадлежащих $L_2(Q_T)$. Теорема 1.7 позволяет перенести этот результат и для областей с негладкой границей, именно, задача (1.17)–(1.19) имеет сильное решение тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathring{H}^1(Q)$.

Теперь рассмотрим параболические дифференциально-разностные уравнения.

Введем ограниченные разностные операторы $\mathrm{R}_{ij} : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ и $\mathrm{R}_{ijQ} : L_2(Q) \to L_2(Q)$ по формулам

$$\mathrm{R}_{ij}u(x) = \sum_{h \in M} a_{ijh}(x)u(x+h), \quad \mathrm{R}_{ijQ}v = \mathrm{P_Q R}_{ij}\mathrm{I_Q}v.$$

Здесь $M \subset \mathbb{R}^n$ — конечное множество векторов с целочисленными координатами; $a_{ijh} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — комплекснозначные функции; $\mathrm{I_Q}$ — оператор продолжения функций из $L_2(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^n \setminus Q$; $\mathrm{P_Q}$ — оператор сужения функций из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q.

Пусть $\mathrm{B}_{ij} = \mathrm{R}_{ijQ}$ $(i, j = 1, \dots, n)$.

Будем рассматривать дифференциально-разностный оператор

$$\mathrm{A_R} = \mathrm{A_B}u = -\sum_{i,j=1}^{n} (\mathrm{R}_{ijQ} u_{x_j})_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{R}_{iQ} u_{x_i} + \mathrm{R}_{0Q} u,$$

Соответственно, введем неограниченный оператор $\mathcal{A}_{\mathcal{R}} : \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{R}}) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$, действующий в пространстве распределений $D'(Q)$ по формуле $\mathcal{A}_{\mathcal{R}} u = \mathrm{A_R} u$ $(u \in D(\mathcal{A}_{\mathcal{R}}) = \{u \in \mathring{H}^1(Q) : \mathrm{A_R} u \in \ L_2(Q)\}$.

Для того, чтобы сформулировать условия сильной эллиптичности оператора $\mathrm{A_R}$, следуя [31], введем некоторые вспомогательные обозначения. Обозначим через G аддитивную абелеву группу, порожденную множеством M, а через Q_r открытые связные компоненты множества $Q \setminus \left(\bigcup\limits_{h \in G} (\partial Q + h) \right)$.

Определение 1.10 *Множества Q_r мы будем называть подобластями, а совокупность $\mathcal{R}$ всевозможных подобластей Q_r — разбиением множества Q.*

Разбиение $\mathcal{R}$ естественным образом распадается на непересекающиеся классы : будем считать, что подобласти Q_{r_1}, $Q_{r_2} \in \mathcal{R}$ принадлежат одному классу, если существует $h \in G$ такое, что $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$. Обозначим подобласти Q_r через Q_{sl}, где s — номер класса $(s = 1, 2, ...)$, а l — порядковый номер подобласти в s-ом классе. В силу ограниченности области Q каждый класс состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl} и $N(s) \leq ([diamQ] + 1)^n$.

Для того, чтобы сформулировать необходимые условия сильной эллиптичности в алгебраической форме, мы введем матрицы $R_{ijs}(x)$ $(x \in$

$\overline{Q}_{s1}$) порядка $N(s)\times N(s)$ с элементами

$$r_{kl}^{ijs}(x)=\begin{cases} a_{ijh}(x+h_{sk}) & , \quad (h=h_{sl}-h_{sk}\in M) \\ 0 & , \quad (h_{sl}-h_{sk}\notin M), \end{cases}$$

где $h_{sk}\in M$ определяются из условия $Q_{kl}=Q_{s1}+h_{sk}$, $h_{s1}=0$.

В силу теоремы 9.1, гл. 2, [31], если оператор $\mathrm{A_R}$ является сильно эллиптическим, то для всех $s=1,2,\dots,$ $x\in\overline{Q}_{s1}$ и $0\neq\xi\in\mathbb{R}^n$ матрицы

$$\sum_{i,j=1}^{n}(R_{ijs}(x)+R_{ijs}^{*}(x))\xi_i\xi_j$$

положительно определены.

Пусть теперь $x\in\overline{Q}_{s1}$ — произвольная точка. Рассмотрим все точки $x^l\in\overline{Q}$ такие, что $x^l-x\in G$. Поскольку область Q ограниченная, множество $\{x^l\}$ состоит из конечного числа точек $I=I(s,x)\quad(I\geq N(s))$. Перенумеруем точки x^l так, что $x^l=x+h_{sl}$ для $l=1,\dots,N=N(s)$, $x^1=x$.

Введем матрицы $A_{ijs}(x)$ порядка $I\times I$ с элементами $a_{lk}^{ijs}(x)$ по формуле

$$a_{lk}^{ijs}(x)=\begin{cases} a_{ijh}(x^l) & , \quad (h=x^k-x^l\in M), \\ 0 & , \quad (x^k-x^l\notin M) \end{cases} \tag{1.20}$$

В силу теоремы 9.2, гл. 2, [31], если для всех $s=1,2,\dots,$ $x\in\overline{Q}_{s1}$ и $0\neq\xi\in\mathbb{R}^n$ матрицы

$$\sum_{i,j=1}^{n}(A_{ijs}(x)+A_{ijs}^{*}(x))\xi_i\xi_j$$

положительно определены, то оператор $\mathrm{A_R}$ является сильно эллиптическим.

Очевидно, если $I = N$, то матрица $R_{ijs}(x)$ равна матрице $A_{ijs}(x)$. Если $N < I$, то матрица $R_{ijs}(x)$ получается из матрицы A_{ijs} вычеркиванием последних $I - N$ строк и столбцов.

Рассмотрим параболическое дифференциально-разностное уравнение

$$u_t(x,t) + \mathrm{A_R} u(x,t) = f(x,t) \qquad ((x,t) \in Q_T), \tag{1.21}$$

с краевым условием

$$u|_{\Gamma_T} = 0 \qquad ((x,t) \in \Gamma_T) \tag{1.22}$$

и начальным условием

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \qquad (x \in Q). \tag{1.23}$$

Теорема 1.8 *Пусть оператор* $\mathrm{A_R}$ *— сильно эллиптический.*

Тогда задача (1.21)–(1.23) имеет единственное сильное решение тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathring{H}^1(Q)$.

Доказательство. Покажем, что операторы R_{ijQ} $(i,j = 1,\ldots,n)$ удовлетворяют условиям 1.2 и 1.3. Действительно, в силу леммы 8.13, гл. 2, [31] операторы R_{ijQ} непрерывно отображают $\mathring{H}^1(Q)$ в $H^1(Q)$. А по условию теоремы оператор $\mathrm{A_R}$ является сильно эллиптическим. Аналогично R^*_{ijQ} удовлетворяют условию 1.2.

В силу теоремы 1.7, критерием сильной разрешимости задачи (1.21)–(1.23) является принадлежность φ пространству $\mathring{H}^1(Q)$. ■

Пример 1.2 .

Рассмотрим задачу (1.21)–(1.23), предполагая, что $Q = (0, \frac{4}{3}) \times (0, \frac{4}{3})$, $\mathrm{A_R} = -\Delta \mathrm{R}_Q$, $\mathrm{R}_Q = \mathrm{P_Q R I_Q}$, $\mathrm{R}u(x) = u(x) + au(x_1 + 1, x_2 + 1) + au(x_1 - 1, x_2 - 1)$, $0 < a < 1$. Очевидно, что разбиение $\mathcal{R}$ области Q состоит из двух классов подобластей: 1) $Q_{11} = (0, \frac{1}{3}) \times (0, \frac{1}{3})$, $Q_{12} = (1, \frac{4}{3}) \times (1, \frac{4}{3})$ и 2) $Q_{21} = Q \setminus (\overline{Q}_{11} \cup \overline{Q}_{12})$. Введем множество $\mathcal{K} \subset \partial Q$, состоящее из из четырех точек: $g^1 = (\frac{1}{3}, 0)$, $g^2 = (\frac{4}{3}, 1)$, $g^3 = (0, \frac{1}{3})$, $g^4 = (1, \frac{4}{3})$.

Матрицы $A_s(x)$ $(x \in \overline{Q}_{s1}; s = 1, 2)$ имеют вид

$$A_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \qquad (x \in \overline{Q}_{11}),$$

$$A_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \ (x \in \overline{Q}_{21} \cap \mathcal{K}), \quad A_2(x) = (1) \ (x \in \overline{Q}_{21} \setminus \mathcal{K}).$$

Таким образом, матрицы $A_s(x)(\xi_1^2 + \xi_2^2)$ $(x \in \overline{Q}_{s1}; s = 1, 2)$ положительно определены. Следовательно, оператор $\mathrm{A_R}$ является сильно эллиптическим.

Согласно теореме 1.8, задача (1.21)–(1.23) имеет единственное сильное решение тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathring{H}^1(Q)$.

В главе 3 мы покажем, что имеет место нарушение гладкости сильных решений на границе соседних подобластей $Q_{s_1 l_1} \times (0, T)$ и $Q_{s_2 l_2} \times (0, T)$ и вблизи множества $\mathcal{K} \times (0, T)$.

Введем теперь операторы растяжения и сжатия $\mathrm{T}_{ij} : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ и $T_{ijQ} : L_2(Q) \to L_2(Q)$ по формулам

$$\mathrm{T}_{ij} u(x) = \sum_{l \in N} a_{ijl} u(q^{-l} x), \quad \mathrm{T}_{ijQ} v = \mathrm{P_Q T}_{ij} \mathrm{I_Q} v,$$

где $N \subset \mathbb{N}$ — конечное множество целых чисел; $a_{ijl} \in \mathbb{C}$; $q > 1$; операторы $\mathrm{I_Q}$ и $\mathrm{P_Q}$ такие же, как в определении разностных операторов.

Возьмем в качестве операторов B_{ij} операторы T_{ijQ} $(i, j = 1, \ldots, n)$ и рассмотрим функционально-дифференциальный оператор

$$\mathrm{A_T} u = -\sum_{i,j=1}^{n} (\mathrm{T}_{ijQ} u_{x_j})_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{T}_{iQ} u_{x_i} + \mathrm{T}_{0Q} u,$$

с растяжением и сжатием аргументов.

Обозначим $t_{ij}(\lambda) = \sum_{l \in N} a_{ijl} \lambda^l$. В силу теоремы 1, [9], условие

$$\sum_{i,j=1}^{n} t_{ij}(\lambda) \xi_i \xi_j > 0 \quad (\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = q^{n/2}, 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n), \tag{1.24}$$

является достаточным для сильной эллиптичности оператора $\mathrm{A_T}$. Если дополнительно предположить, что область Q удовлетворяет условию

$$\overline{Q} \subset qQ,$$

то в силу теоремы 2, [9] условие (1.24) является также и необходимым для сильной эллиптичности оператора $\mathrm{A_T}$.

Рассмотрим параболическое функционально-дифференциальное уравнение с растяжением и сжатием аргументов

$$u_t(x,t) + \mathrm{A_T} u(x,t) = f(x,t) \qquad ((x,t) \in Q_T), \tag{1.25}$$

с краевым условием

$$u|_{\Gamma_T} = 0 \qquad ((x,t) \in \Gamma_T) \tag{1.26}$$

и начальным условием

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \qquad (x \in Q). \tag{1.27}$$

Теорема 1.9 *Пусть для операторов* T_{ijQ} *выполнено условие 1.24. Тогда задача (1.25)–(1.27) имеет единственное сильное решение тогда и только тогда, когда* $\varphi \in \mathring{H}^1(Q)$.

Доказательство. Покажем, что операторы T_{ijQ}, T^*_{ijQ} удовлетворяют условию 1.2. Легко видеть, что операторы T_{ijQ}, T^*_{ijQ} ограниченно отображают $\mathring{H}^1(Q)$ в $H^1(Q)$. По условию теоремы A_T и $\mathrm{A}_{\mathrm{T}^*}$ будут сильно эллиптичными.

В силу теоремы 1.7, критерием сильной разрешимости задачи (1.25)–(1.27) является принадлежность φ пространству $\mathring{H}^1(Q)$. ■

Глава 2

Параболические нелокальные задачи.

2.1 Нелокальные условия без подхода носителей нелокальных членов к границе.

Рассмотрим нелокальную задачу для параболического уравнения

$$u_t(x,t) - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u(x,t)\right) + A_1 u(\cdot,t) = f(x,t), \quad ((x,t)\in Q_T) \tag{2.1}$$

с нелокальным условием

$$(u(x,t) + B_1 u(\cdot,t))_{|\Gamma_T} + B_2 u(\cdot,t) = 0, \quad ((x,t)\in \Gamma_T) \tag{2.2}$$

и начальным условием

$$u_{|t=0} = \varphi(x). \qquad (x\in Q) \tag{2.3}$$

Здесь $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$; $Q_T = Q\times(0,T)$, $\Gamma_T = \partial Q\times(0,T)$, $0<T<\infty$; $a_{ij}\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ $(i,j=1,\dots,n)$

— вещественные функции; $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j > 0$, для $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$; оператор $A_1 : H^1(Q) \to L_2(Q)$ ограничен. Операторы B_1 и B_2 удовлетворяют следующим условиям.

Условие 2.1 $\mathrm{B}_1 : L_2(Q) \to L_2(Q)$ *— линейный ограниченный оператор, а его сужение* $B_1 : H^2(Q) \to H^2(Q)$ *— также ограниченный оператор, при этом существует* $\delta > 0$ *такое, что*

$$\|B_1 u\|_{L_2(Q)} \leq c_1 \|u\|_{L_2(Q_\delta)}, \qquad (u \in L_2(Q))$$

$$\|B_1 u\|_{H^2(Q)} \leq c_2 \|u\|_{H^2(Q_\delta)}, \qquad (u \in H^2(Q))$$

где $Q_\delta = \{x \in Q : \varrho(x, \partial Q) > \delta\}$*;* $c_1, c_2 > 0$ *не зависят от* u*.*

Условие 2.2 $\mathrm{B}_2 : L_2(Q) \to L_2(\partial Q)$ *— линейный ограниченный оператор, а его сужение* $B_2 : H^{3/2}(Q) \to H^{3/2}(\partial Q)$ *— также ограниченный оператор.*

Введем неограниченный оператор $\mathcal{L}_\gamma : \mathcal{D}(\mathcal{L}_\gamma) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$, по формуле $\mathcal{L}_\gamma u = (A_0 + A_1)u$, $(u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_\gamma))$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{L}_\gamma) = \{u \in H^2(Q) : Bu = 0\}$, где $A_0 u = -\sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i} u(x)\right)$, $Bu = (u + B_1 u)_{|\partial Q} + B_2 u$.

В работе [31] получен следующий результат о спектре оператора $\mathcal{L}_\gamma$.

Теорема 2.1 *Пусть выполнены условия 2.1 и 2.2, тогда:*

(a) Спектр оператора $\mathcal{L}_\gamma$ *дискретный, и для для* $\lambda \notin \sigma(\mathcal{L}_\gamma)$ *резольвента* $\mathrm{R}(\lambda; \mathcal{L}_\gamma)$ *компактный оператор.*

(b) Для каждого $0 < \varepsilon < \pi$ существует $q > 0$ такое, что $\sigma(\mathcal{L}_\gamma) \subset \Omega_{\varepsilon,q} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < q, |\arg \lambda| < \varepsilon\}$.

(c) Для $\lambda \notin \Omega_{\varepsilon,q}$ имеет место оценка на резольвенту

$$\|R(\lambda; \mathcal{L}_\gamma)\| \leq \frac{c_3}{|\lambda|}, \tag{2.4}$$

где $c_3 > 0$ не зависит от λ.

Доказательство: Утверждения (a) и (b) следуют из теоремы 21.3, гл 5, [31]. Пусть $f \in L_2(Q)$, из теоремы 21.2, гл 5, [31] следует, что для $\lambda \notin \Omega_{\varepsilon,q}$ имеет место следующая оценка

$$\left(\|R(\lambda; \mathcal{L}_\gamma) f\|^2_{H^2(Q)} + |\lambda|^2 \|R(\lambda; \mathcal{L}_\gamma) f\|^2_{L_2(Q)}\right)^{1/2} \leq c_4 \|f\|_{L_2(Q)}.$$

Из этой оценки следует оценка (2.4). ■

Для исследования сильной разрешимости задачи (2.1)–(2.3) воспользуемся теорией полугрупп.

В силу теоремы 2.1 и критерия п.1, гл 1 [21] получаем следующий результат.

Теорема 2.2 *Пусть выполнены условия 2.1 и 2.2. Тогда оператор $-\mathcal{L}_\gamma$ порождает аналитическую полугруппу $\{T_t\}_{t \geq 0}$.*

Перепишем задачу (2.1)–(2.3) в виде абстрактной задачи Коши в гильбертовом пространстве $L_2(Q)$:

$$u'(t) + \mathcal{L}_\gamma u(t) = f(t), \quad t \in (0, T) \tag{2.5}$$

$$u(0) = \varphi, \tag{2.6}$$

где $f \in L_2(0, T; L_2(Q))$, $\varphi \in L_2(Q)$.

Определение 2.1 *Функция $u \in \mathcal{W}(\mathcal{L}_\gamma)$ называется сильным решением задачи (2.1)–(2.3), если u удовлетворяет почти всюду уравнению (2.1) и удовлетворяет условию (2.3).*

Теорема 2.3 *Пусть выполненны условия 2.1 и 2.2. Тогда для всех $f \in L_2(Q_T)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_\gamma)$ задача (2.1)–(2.3) имеет единственное сильное решение $u \in \mathcal{W}(\mathcal{L}_\gamma)$. Более того, это решение представляется по формуле*

$$u(x,t) = T_t\varphi(x) + \int\limits_0^t T_{t-s} f(x,s)ds, \tag{2.7}$$

где $\{T_t\}_{t \geq 0}$ — аналитическая полугруппа, порожденная оператором $-\mathcal{L}_\gamma$.

Доказательство: В силу теоремы 3.7, гл. 1 [21] задача (2.5), (2.6) имеет единственное сильное решение, представленное формулой (2.7) тогда и только тогда, когда выполнено следующее неравенство:

$$\int\limits_0^T \|\mathcal{L}_\gamma T_t \varphi\|^2_{L_2(Q)} dt < \infty. \tag{2.8}$$

Поскольку $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_\gamma)$, то $\mathcal{L}_\gamma T_t \varphi = T_t \mathcal{L}_\gamma \varphi$, и мы имеем

$$\int\limits_0^T \|\mathcal{L}_\gamma T_t \varphi\|^2_{L_2(Q)} dt = \int\limits_0^T \|T_t \mathcal{L}_\gamma \varphi\|^2_{L_2(Q)} dt \leq {}_5\|\mathcal{L}_\gamma \varphi\|^2_{L_2(Q)} < \infty.$$

■

Вопрос о гладкости сильных решений задачи (2.1)–(2.3) мы рассмотрим в § 3.1.

Пример 2.1

Рассмотрим уравнение

$$u_t(x,t) - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u(x,t)\right) +$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u(x,t) + c(x)u(x,t) = f(x,t), \quad ((x,t) \in Q_T) \tag{2.9}$$

с нелокальными условиями

$$\sum_{s=0}^{S} \gamma_s(x)u(\omega_s(x),t)|_{\partial Q\times(0,T)} = 0 \tag{2.10}$$

и с начальным условием

$$u_{|t=0} = \varphi(x), \qquad (x \in Q) \tag{2.11}$$

где $a_{ij}, b_i, c, \gamma_s \in C^\infty(\overline{Q})$ — вещественные функции; ω_s — бесконечно дифференцируемое невырожденное отображение некоторой окрестности Γ границы ∂Q на $\omega_s(\Gamma)$ так, что $\overline{\omega_s(\Gamma)} \subset Q$ при $s > 0$, а $\omega_0(x) = x$, $\gamma_0(x) = 1$

Как показано в примере 21.1, гл. 5 [31] нелокальные условия (2.10) можно представить в виде (2.2) с $B_2 = 0$.

Определим оператор A_1 по формуле $A_1u(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u(x) + c(x)u(x)$. Таким образом, мы можем рассматривать задачу (2.9)–(2.11) как частный случай задачи (2.1)–(2.3). В силу теоремы 2.3 задача (2.9)–(2.11) имеет единственное сильное решение для всех $f \in L_2(Q_T)$ и $\varphi \in H^2(Q)$ таких, что $\sum\limits_{s=0}^{S} \gamma_s(x)\varphi(\omega_s(x))|_{\partial Q} = 0$.

2.2 Нелокальные условия в цилиндре.

Рассмотрим нелокальную задачу для параболического уравнения

$$u_t(x,t) - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u(x,t)\right) + A_1 u(\cdot,t) = f(x,t), \quad ((x,t) \in Q_T) \tag{2.12}$$

с нелокальными условиями

$$(u(x,t) + B_1^\mu u(\cdot,t))|_{\{x_1=s_\mu\}\times G\times(0,T)} + B_2^\mu(\cdot,t)u = 0,$$

$$((x',t) \in G \times (0,T); \mu = 1,2) \tag{2.13}$$

$$u|_{[0,d]\times\partial G\times(0,T)} = 0$$

и начальным условием

$$u_{|_{t=0}} = \varphi(x). \qquad (x \in Q) \tag{2.14}$$

Здесь $Q = (0,d) \times G$, $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область с границей $\partial G \in C^\infty$, если $n \geq 3$; $Q_T = Q \times (0,T)$ $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x' = (x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $s_1 = 0$, $s_2 = d$; $a_{ij} = a_{ji} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — вещественные функции; $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j > 0$, для $x \in \overline{Q}$, $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$; оператор $A_1 : H^1(Q) \to L_2(Q)$ ограничен; операторы B_1^μ, B_2^μ удовлетворяют условиям 2.3, 2.4. Обозначим через $H_0^k(Q)$ и $H_0^k(G)$ $k \geq 1$ подпространства функций из $H^k(Q)$ и $H^k(G)$ таких, что следы, соответственно, на $[0,d] \times \partial Q$ и на ∂G равены нулю.

Условие 2.3 $B_1^\mu : L_2(Q) \to L_2(Q)$ *— линейные ограниченные операторы, а сужения* $B_1^\mu : H_0^2(Q) \to H_0^2(Q)$ *— также ограниченные операторы, при* *этом существует* $\delta > 0$ *такое, что*

$$\|B_1^\mu u\|_{L_2(Q)} \le c_1 \|u\|_{L_2(\tilde{Q}_\delta)}, \qquad (u \in L_2(Q))$$

$$\|B_1^\mu u\|_{H^2(Q)} \le c_2 \|u\|_{H^2(\tilde{Q}_\delta)}, \qquad (u \in H^2(Q))$$

где $\tilde{Q}_\delta = (\delta; d-\delta) \times G$ $\delta > 0$*;* $c_1, c_2 > 0$ *не зависят от* u*.*

Условие 2.4 $B_2^\mu : L_2(Q) \to L_2(G)$ *— линейные ограниченные операторы, а сужения* $B_2^\mu : H_0^{3/2}(Q) \to H_0^{3/2}(G)$ *— также ограниченные операторы.*

Введем неограниченный оператор $\mathcal{L}_\gamma : \mathcal{D}(\mathcal{L}_\gamma) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$, по формуле $\mathcal{L}_\gamma u = (A_0 + A_1)u$, $(u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_\gamma))$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{L}_\gamma) = \{u \in H_0^2(Q) : B^\mu u = 0\}$, где $A_0 u = -\sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u(x)\right)$, $B^\mu u = (u + B_1^\mu u)_{|x_1 = s_\mu} + B_2^\mu u$.

В работе [31] получен следующий результат о спектре оператора $\mathcal{L}_\gamma$.

Теорема 2.4 *Пусть выполнены условия 2.3 и 2.4, тогда:*

(a) Спектр оператора $\mathcal{L}_\gamma$ *дискретный, и для для* $\lambda \notin \sigma(\mathcal{L}_\gamma)$ *резольвента* $\mathrm{R}(\lambda; \mathcal{L}_\gamma)$ *компактный оператор.*

(b) Для каждого $0 < \varepsilon < \pi$ *существует* $q > 0$ *такое, что* $\sigma(\mathcal{L}_\gamma) \subset \Omega_{\varepsilon,q} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < q, |\arg\lambda| < \varepsilon\}$.

(c) Для $\lambda \notin \Omega_{\varepsilon,q}$ *имеет место оценка на резольвенту*

$$\|R(\lambda; \mathcal{L}_\gamma)\| \le \frac{c_3}{|\lambda|}, \tag{2.15}$$

где $c_3 > 0$ *не зависит от* λ*.*

Доказательство: Утверждения (a) и (b) следуют из теоремы 22.2, гл 5, [31]. Пусть $f \in L_2(Q)$, из доказательства теоремы 22.1, гл 5, [31] следует, что для $\lambda \notin \Omega_{\varepsilon,q}$ имеет место следующая оценка

$$\left(\|R(\lambda;\mathcal{L}_\gamma)f\|^2_{H^2(Q)} + |\lambda|^2\|R(\lambda;\mathcal{L}_\gamma)f\|^2_{L_2(Q)}\right)^{1/2} \le c_4\|f\|_{L_2(Q)}.$$

Из этой оценки следует оценка (2.15). ∎

Для исследования сильной разрешимости задачи (2.12)–(2.14) воспользуемся теорией полугрупп.

В силу теоремы 2.4 и критерия п.1, гл 1 [21] получаем следующий результат.

Теорема 2.5 *Пусть выполнены условия 2.3 и 2.4. Тогда оператор* $-\mathcal{L}_\gamma$ *порождает аналитическую полугруппу* $\{T_t\}_{t\ge 0}$.

Перепишем задачу (2.12)–(2.14) в виде абстрактной задачи Коши в гильбертовом пространстве $L_2(Q)$:

$$u'(t) + \mathcal{L}_\gamma u(t) = f(t), \quad t \in (0,T) \tag{2.16}$$

$$u(0) = \varphi, \tag{2.17}$$

где $f \in L_2(0,T;L_2(Q))$, $\varphi \in L_2(Q)$.

Определение 2.2 *Функция* $u \in \mathcal{W}(\mathcal{L}_\gamma)$ *называется сильным решением задачи (2.12)–(2.14), если* u *удовлетворяет почти всюду уравнению (2.16) и удовлетворяет условию (2.17).*

Теорема 2.6 *Пусть выполнены условия 2.3 и 2.4. Тогда для всех* $f \in L_2(Q_T)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_\gamma)$ *задача (2.12)–(2.14) имеет единственное сильное решение* $u \in \mathcal{W}(\mathcal{L}_\gamma)$. *Более того, это решение представляется по формуле*

$$u(x,t) = T_t\varphi(x) + \int\limits_0^t T_{t-s} f(x,s)ds, \tag{2.18}$$

где $\{T_t\}_{t\geq 0}$ *— аналитическая полугруппа, порожденная оператором* $-\mathcal{L}_\gamma$.

Доказательство: В силу теоремы 3.7, гл. 1 [21] задача (2.16), (2.17) имеет единственное сильное решение, представленное формулой (2.18) тогда и только тогда, когда выполнено следующее неравенство:

$$\int\limits_0^T \|\mathcal{L}_\gamma T_t \varphi\|^2_{L_2(Q)} dt < \infty. \tag{2.19}$$

Поскольку $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_\gamma)$, то $\mathcal{L}_\gamma T_t \varphi = T_t \mathcal{L}_\gamma \varphi$, и мы имеем

$$\int\limits_0^T \|\mathcal{L}_\gamma T_t \varphi\|^2_{L_2(Q)} dt = \int\limits_0^T \|T_t \mathcal{L}_\gamma \varphi\|^2_{L_2(Q)} dt \leq c_2 \|\mathcal{L}_\gamma \varphi\|^2_{L_2(Q)} < \infty.$$

■

Вопрос о гладкости сильных решений задачи (2.12)–(2.14) мы рассмотрим в § 3.1.

Пример 2.2

Рассмотрим уравнение

$$u_t(x,t) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u(x,t)\right) +$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u(x,t) + c(x)u(x,t) = f(x,t), \quad ((x,t) \in Q_T) \tag{2.20}$$

с нелокальными условиями

$$\begin{gathered} u_{|x_1=s_\mu} + \sum_{i=1}^{m} b_{\mu i}(x')u_{|x_1=d_i} + \int\limits_0^d b_\mu(x)u(x,t)dx_1 = 0, \quad (\mu = 1,2) \\ u_{|[0,d]\times\partial G\times(0,T)} = 0 \end{gathered} \tag{2.21}$$

и с начальным условием

$$u_{|t=0} = \varphi(x), \qquad (x \in Q) \tag{2.22}$$

где $a_{ij}, b_i, c, b_\mu \in C^\infty(\overline{Q})$, $b_{\mu i} \in C^\infty(\overline{G})$ — вещественные функции; $0 < d_i < d$, $s_1 = 0$, $s_2 = d$.

Как показано в примере 22.1, гл. 5 [31] нелокальные условия (2.21) можно представить в виде (2.13).

Определим оператор A_1 по формуле $A_1u(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u(x)+c(x)u(x)$. Таким образом, мы можем рассматривать задачу (2.20)–(2.22) как частный случай задачи (2.12)–(2.14). В силу теоремы 2.6 задача (2.20)–(2.22) имеет единственное сильное решение для всех $f \in L_2(Q_T)$ и $\varphi \in H_0^2(Q)$, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{gathered} \varphi_{|x_1=s_\mu} + \sum_{i=1}^{m} b_{\mu i}(x')\varphi_{|x_1=d_i} + \int\limits_0^d b_\mu(x)\varphi(x)dx_1 = 0, \quad (\mu = 1,2) \\ \varphi_{|[0,d]\times\partial G} = 0. \end{gathered}$$

2.3 Параболические задачи с нелокальными условиями на сдвигах границы.

Нелокальные условия на сдвигах границы тесно связаны с разностными операторами, которые вводились в § 1.4. В настоящем параграфе нам понадобится некоторые дополнительные свойства разностных операторов.

Будем предполагать, что область Q удовлетворяет условию 1.1.

Будем рассматривать разностный оператор $\mathrm{R} : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$, введеный в § 1.4, с постоянными коэффициентами.

Определение 2.3 *Функция $\varphi \in C(\overline{Q})$ называется G-периодичной в $\overline{Q}$, если $\varphi(x) = \varphi(x+h)$ для всех $x \in \overline{Q}$, $h \in G$ таких, что $x + h \in \overline{Q}$.*

Введем множество

$$\mathcal{K} = \bigcup_{h_1, h_2 \in G} \{\overline{Q} \cap (\partial Q + h_1) \cap \overline{[(\partial Q + h_2) \setminus (\partial Q + h_1)]}\}.$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $\mu_{n-1}(\mathcal{K} \cap \partial Q) = 0$, где $\mu_{n-1}(\cdot)$ – $(n-1)$-мерная мера Лебега.

Обозначим через Γ_p связные компоненты открытого (в индуцированной на ∂Q топологии) множества $\partial Q \setminus \mathcal{K}$. Имеет место следующая лемма.

Лемма 2.1 (см. лемма 7.5, гл. 2, [31]) *Если $(\Gamma_p + h) \cap \overline{Q} \neq \varnothing$ при некотором $h \in G$, то либо $\Gamma_p + h \subset Q$, либо существует $\Gamma_r \subset \partial Q \setminus \mathcal{K}$ такое, что $\Gamma_p + h = \Gamma_r$.*

В силу леммы 2.1 мы можем разбить множество $\{\Gamma_p + h : \Gamma_p + h \subset \overline{Q}, p = 1, 2, \dots; h \in G\}$ на классы следующим образом. Множества $\Gamma_{p_1} + h_1$, $\Gamma_{p_2} + h_2$ принадлежат одному и тому же классу, если

1) существует $h \in G$ такое, $\Gamma_{p_1} + h_1 = \Gamma_{p_2} + h_2 + h$;

2) в случае $\Gamma_{p_1} + h_1, \Gamma_{p_2} + h_2 \subset \partial Q$ направления внутренних нормалей к ∂Q в точках $x \in \Gamma_{p_1} + h_1$ и $x - h \in \Gamma_{p_2} + h_2$ совпадают.

Очевидно, множество $\Gamma_p \subset \partial Q$ может принадлежать лишь одному классу, а множество $\Gamma_p + h \subset Q$ – не более чем двум классам. Обозначим множества $\Gamma_p + h$ через Γ_{rj}, где $r = 1, 2, \dots$ – номер класса, j – номер элемента в данном классе $1 \le j \le J = J(r)$). Не ограничивая общности, будем считать, что

$$\Gamma_{r1}, \dots, \Gamma_{rJ_0} \subset Q, \quad \Gamma_{r(J_0+1)}, \dots, \Gamma_{rJ} \subset \partial Q \quad (0 \le J_0 = J_0(r) < J(r)).$$

Лемма 2.2 ((см. лемма 7.7, гл. 2, [31]) *Для любого $r = 1, 2, \dots$ существует единственное $s = s(r)$ такое, что $N(s) = J(r)$, и при этом подобласти s-го класса Q_{sl} можно перенумеровать так, что $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{sl}$ $(l = 1, \dots, N(s))$.*

Будем считать, что выполнено следующее условие.

Условие 2.5 *Для каждой подобласти Q_{sl} $(s = 1, 2, \dots, l = 1, \dots, N(s))$ и для любого $\varepsilon > 0$, существует открытое множество $G_{sl} \subset Q_{sl}$ с границей $\partial G_{sl} \in C^1$ такое, что $\mu_n(Q_{sl} \setminus G_{sl}) < \varepsilon$, $\mu_{n-1}(\partial Q_{sl} \setminus \partial G_{sl}) < \varepsilon$.*

Обозначим через $H^1_\gamma(Q)$ $(\gamma = \{\gamma^r_{lj}\})$ подпространство функций из $H^1(Q)$ удовлетворяющих нелокальным условиям

$$\left.\begin{array}{lcll} u_{|\Gamma_{rl}} & = & \sum\limits_{j=1}^{J_0} \gamma^r_{lj} u_{|\Gamma_{rj}} & (r \in B,\ l = J_0 + 1, \dots, J), \\ u_{|\Gamma_{rl}} & = & 0 & (r \notin B,\ l = 1, \dots, J), \end{array}\right\} \tag{2.23}$$

где $J_0 = J_0(r)$, $J = J(r)$, γ^r_{lj} – комплексные числа, $B = \{r : J_0 > 0\}$.

В силу леммы 2.2 для каждого $r = 1, 2, \dots,$ существует единственное $s = s(r)$ такое, что $N(s) = J(r)$ и после перенумерации подобластей s-го класса $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{sl}$ $(l = 1, \dots, N)$. Мы обозначим через R_{s0} – матрицу порядка $J_0 \times J_0$ получающуюся из матрицы R_s $(s = s(r))$ удалением последних $N - J_0$ строк и столбцов.

В [31] доказана следующая теорема.

Теорема 2.7 (см. теорема 8.1, гл. 2, [31]) *Пусть выполнено условие 2.5 Предположим, что матрицы* R_s $(s = 1, 1, \dots)$, R_{s0} $(s = s(r),\ r \in B)$ *невырождены. Тогда существует множество* $\gamma = \{\gamma^r_{lr}\}$ *такое, что оператор* $\mathrm{R_Q}$ *отображает* $\mathring{H}^1(Q)$ *на* $H^1_\gamma(Q)$ *непрерывно и взаимооднозначно.*

Пример 2.3

Пусть $Q = (0, 2) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$, $\mathrm{R}u(x) = u(x) + \gamma u(x_1 + 1, x_2) + \gamma u(x_1 - 1, x_2)$, где $\gamma \in \mathbb{R}$.

Тогда разбиение $\mathcal{R}$ области Q состоит из подобластей $Q_{11} = (0, 1) \times (0, 1)$, $Q_{12} = (1, 2) \times (0, 1)$ и

$$\mathrm{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}.$$

Если $|\gamma| \neq 1$, то по теореме 2.7 оператор $\mathrm{R_Q} : \mathring{H}^1(Q) \to H^1_\gamma(Q)$ непрерывен и взаимооднозначен. Здесь $H^1_\gamma(Q)$ – подпространство функций из $H^1(Q)$ удовлетворяющих условиям

$$w|_{x_2=0} = w_{|_{x_2=1}},\ \ w|_{x_1=0} = \gamma w|_{x_1=1},\ \ w|_{x_1=2} = \gamma w|_{x_1=1}. \tag{2.24}$$

Теперь мы сформулируем условия существования разностного оператора $\mathrm{R_Q}$, отображающего пространство $\mathring{H}^1(Q)$ на пространство $H^1_\gamma(Q)$, соответствующее условиям (2.23).

Введем множество $G_0 = \{h \in G : |h| \le \operatorname{diam} Q\}$. Для каждого $s = 1, 2, \dots$ упорядоченному множеству чисел $\Lambda = \{a_h \in \mathbb{C} : h \in G_0\}$ поставим в соответствие матрицу $A_s(x)$ $(x \in \overline{Q}_{s1})$ порядка $I \times I$ $(I = I(s,x))$ с элементами

$$a^s_{ij}(x) = a_h, \qquad \text{если } x^j - x^i = h, \tag{2.25}$$

где $\{x^i\}$ $(i = 1, \dots, I(s,x))$ множество точек вида $x + h \in \overline{Q}$ $(h \in G)$ занумерованных так, что $x^1 = x$, $x^i = x + h_{si}$ $(i = 1, \dots, N(s))$; h_{si} определяются из условия $Q_{si} = Q_{s1} + h_{si}$. Введем матрицы R_s порядка $N(s) \times N(s)$, полученные из матриц $A_s(x)$ вычеркиванием последних $I - N$ строк и столбцов.

По лемме 2.2 для каждого $r = 1, 2, \dots$ существует единственное $s = s(r)$ такое, что $N(s) = J(r)$ и при этом подобласти s-го класса Q_{sl} можно перенумеровать так, что $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{sl}$ $(l = 1, \dots, N(s))$. Через $\mathrm{R}_{s(r)}$ обозначим матрицу, полученную из R_s $s = s(r)$ соответствующей пренумерацией столбцов и строк, а через e^r_j $(j = 1, \dots, J(r))$ обозначим j-ю строку матрицы порядка $J \times J_0$, полученной из матрицы $\mathrm{R}_{s(r)}$ вычеркиванием последних $J - J_0$ столбцов.

Условие 2.6 *Существует множество* Λ *такое, что для всех* $s = 1, 2, \dots$ *матрицы* $\mathrm{R}_s + \mathrm{R}^*_s$ *положительно определены и для каждого* $r \in B$ *и*

$s = s(r)$ *выполняются соотношения*

$$e_l^r = \sum_{j=1}^{J_0} \gamma_{lj}^r e_j^r \qquad (l = J_0 + 1, \dots, J) \tag{2.26}$$

Отметим, что условие 2.6 является чисто алгебраическим. Проверка его сводится к решению системы линейных однородных алгебраических уравнений (2.26) относительно неизвестных a_h, и последующей проверке, положительной определенности матриц $R_s + R_s^*$ $(s = 1, 2, \dots, x \in \overline{Q}_{s1})$, построенных по найденному решению $\{a_h\}$ в соответствии с формулой (2.25).

Введем неограниченный оператор $\mathcal{A}_\gamma : \mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$, действующий в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(Q)$ по формуле

$$\mathcal{A}_\gamma u = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u \right)$$

с областью определения $D(\mathcal{A}_\gamma) = \{u \in H_\gamma^1(Q) : \mathcal{A}_\gamma u \in L_2(Q)\}$ где $a_{ij} \in C^\infty(\overline{Q})$, $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, \dots, n)$ — вещественные G-периодические функции; $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c|\xi|^2$ для любых $x \in \overline{Q}$, $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$.

Будем рассматривать следующее параболическое уравнение в цилиндре $Q_T = Q \times (0, T)$, $(0 < T < \infty)$

$$u_t(x,t) + \mathcal{A}_\gamma u(\cdot, t) = f(x,t), \quad ((x,t) \in Q_T) \tag{2.27}$$

с нелокальными условиями

$$\left.\begin{aligned} u|_{\Gamma_{rl}\times(0,T)} &= \sum_{j=1}^{J_0} \gamma_{lj}^r u|_{\Gamma_{rj}\times(0,T)} && (r \in B,\ l = J_0 + 1, \dots, J), \\ u|_{\Gamma_{rl}\times(0,T)} &= 0 && (r \notin B,\ l = 1, \dots, J), \end{aligned}\right\} \tag{2.28}$$

и с начальным условием

$$u_{|t=0} = \varphi(x), \quad (x \in Q) \tag{2.29}$$

где $f \in L_2(Q_T)$, $\varphi \in L_2(Q)$.

Определение 2.4 *Функция $u \in \mathcal{W}(\mathcal{A}_\gamma)$, удовлетворяющая (2.27), (2.29), называется сильным решением задачи (2.27)–(2.29).*

В дальнейшем будем предполагать, что выполнено условие 2.6, в котором матрицы R_s являются эрмитовыми. Следовательно, существует самосопряженный разностный оператор $\mathrm{R_Q}$ такой, что $\mathrm{R_Q} : \mathring{H}^1(Q) \to H^1_\gamma(Q)$, где пространство $H^1_\gamma(Q)$ соответствует условиям (2.23). В силу лемм 8.12 и 8.7, гл. 2 [31] оператор $\mathrm{R_Q}$ является положительно определенным в $L_2(Q)$.

Рассмотрим также неограниченный оператор $\mathcal{A}_\mathcal{R}$, определенный по формуле $\mathcal{A}_\mathcal{R} = \mathcal{A}_\gamma \mathrm{R_Q}$, с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\mathcal{R}) = \mathrm{R_Q^{-1}}\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)$. Этот оператор будем называть дифференциально-разностным. Оператор $\mathrm{R_Q}$ отображает взимооднозначно и непрерывно пространство $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\mathcal{R})$ на пространство $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)$.

В силу предположений относительно коэффициентов a_{ij} и положительной определенности матриц R_s, как показано в примере 9.3, гл. 2, [31], оператор $\mathcal{A}_\mathcal{R}$ является сильно эллиптическим. Для полноты картины, приведем соответствующее доказательство, следуя указанному примеру.

Пусть $u \in \dot{C}^\infty(Q)$. Интегрируя по частям, используя M-периодичность коэффициентов a_{ij} в $\overline{Q}$ и положительную определенность оператора $\mathrm{R_Q}$, получаем

$$(\mathcal{A}_\mathcal{R} u, u)_{L_2(Q)} = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}\mathrm{R_Q} u_{x_i}, u_{x_j})_{L_2(Q)} = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}\sqrt{\mathrm{R_Q}}u_{x_i}, \sqrt{\mathrm{R_Q}}u_{x_j})_{L_2(Q)} \geq$$

$$c_2 \sum_{i=1}^n (\sqrt{\mathrm{R_Q}}u_{x_i}, \sqrt{\mathrm{R_Q}}u_{x_i})_{L_2(Q)} \geq c_3 \|\nabla u\|^2_{L_2(Q)} \geq c_4 \|u\|^2_{H^1(Q)}.$$

В силу положительной определенности оператора $\mathrm{R_Q}$ в пространстве $L_2(Q)$ можно ввести эквивалентное скалярноее произведение по формуле

$$(u, v)'_{L_2(Q)} = (u, \mathrm{R_Q^{-1}} v)_{L_2(Q)}, \tag{2.30}$$

Это скалярное произведение порождает соответствующую эквивалентную норму, которую мы будем обозначать $\|\cdot\|'_{L_2(Q)}$. Также для ограниченного оператора $T : L_2(Q) \to L_2(Q)$ мы будем обозначать через $\|T\|'$ норму оператора T в пространстве $L_2(Q)$ со скалярным произведением, определенным по формуле (2.30).

В работе [31] доказана следующая теорема.

Теорема 2.8 (Теорема 13.3, гл. 2, [31]) *Пусть область удовлетворяет условию 2.5. Пусть матрицы R_s являются эрмитовыми и удовлетворяют условию 2.6 и коэффициенты a_{ij} являются M-периодичными.*

Тогда оператор $\mathcal{A}_\gamma$ является самосопряженным в $L_2(Q)$ со скалярным произведением, заданным по формуле (2.30). Спектр оператора $\mathcal{A}_\gamma$ состоит из вещественных изолированных собственных значений λ_s конечной кратности, и существует $\mu > 0$ такое, что $\lambda_s > \mu$.

Для исследование сильной разрешимости задачи (2.27)-(2.29) воспользуемся теорией полугрупп.

Теорема 2.9 *Пусть область удовлетворяет условию 2.5. Пусть матрицы R_s являются эрмитовыми и удовлетворяют условию 2.6 и коэффициенты a_{ij} являются M-периодичными.*

Тогда оператор $-\mathcal{A}_\gamma$ является инфинитезимальным производящим оператором аналитической полугруппы $\{T_t\}_{t\geq 0}$ в пространстве $L_2(Q)$.

Доказательство: Обозначим через $L_2'(Q)$ пространство $L_2(Q)$ со скалярным произведением, заданным по формуле 2.30. Соответственно оператор $\mathcal{A}_\gamma : L_2'(Q) \to L_2'(Q)$ будем обозначать через A'_γ.

По теореме 2.8 оператор A'_γ положительно определенный в пространстве $L_2'(Q)$. Следовательно, в силу теоремы 1.24, гл. 9 [6] оператор $-\mathrm{A}'_\gamma$ является генератором аналитической полугруппы $\{T_t'\}_{t\geq 0}$ в пространстве $L_2'(Q)$.

Оператор $\mathrm{R}_\mathrm{Q}^{1/2}$ является изоморфизмом из $L_2(Q)$ в $L_2'(Q)$ в силу (2.30). Поэтому оператор $\mathcal{A}_\gamma$ можно представить в виде $\mathcal{A}_\gamma = \mathrm{R}_\mathrm{Q}^{-1/2}\mathrm{A}'_\gamma \mathrm{R}_\mathrm{Q}^{1/2} : L_2(Q) \to L_2(Q)$. Рассмотрим аналитическую полугруппу в $L_2(Q)$, заданную по формуле $T_t = \mathrm{R}_\mathrm{Q}^{-1/2} T_t' \mathrm{R}_\mathrm{Q}^{1/2}$. По определению генератора полугруппы получаем, что оператор $\mathrm{R}_\mathrm{Q}^{-1/2}\mathrm{A}'_\gamma \mathrm{R}_\mathrm{Q}^{1/2} = \mathcal{A}_\gamma$ порождает полугруппу $\{T_t\}_{t\geq 0}$. ■

Теорема 2.10 *Пусть выполнены все условия теоремы 2.9.*

Тогда для любого $f \in L_2(Q_T)$ задача (2.27)-(2.29) имеет единственное сильное решение тогда и только тогда, когда $\varphi \in H^1_\gamma(Q)$. Более того, это решение определяется по формуле

$$u(x,t) = T_t\varphi(x) + \int\limits_0^t T_{t-s}f(x,s)ds, \tag{2.31}$$

где $\{T_t\}_{t\geq 0}$ — аналитическая полугруппа, порожденная оператором $-\mathcal{A}_\gamma$.

Доказательство: Пусть $f \in L_2(Q_T)$. В силу теоремы 3.7, гл. 1, [21] задача имеет единственное сильное решение и справедлива формула (2.31) тогда и только тогда, когда φ удовлетворяет неравенству

$$\int_0^T \|\mathcal{A}_\gamma T_t\varphi\|^2_{L_2(Q)}\, dt < \infty \tag{2.32}$$

По теореме 1.14.5, гл. 1, [6] для выполнения неравенства (2.32) необходимо и достаточно, чтобы $\varphi \in [\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma); L_2(Q)]_{1/2}$.

Покажем, что $H^1_\gamma(Q) = [\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma); L_2(Q)]_{1/2}$ с точностью до эквивалентности нормы. В силу предположений оператор $\mathrm{R_Q}$ отображает взаимооднозначно и непрерывно

$$\mathrm{R_Q} : \mathcal{D}(\mathcal{A}_\mathcal{R}) \to \mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)$$

$$\mathrm{R_Q} : L_2(Q) \to L_2(Q).$$

Поэтому в силу интерполяционной теоремы (см. теорема 5.1, гл 1, [8]) оператор $\mathrm{R_Q}$ отображает взаимооднозначно и непрерывно $\mathrm{R_Q} : [\mathcal{D}(\mathcal{A}_\mathcal{R}); L_2(Q)]_{1/2} \to [\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma); L_2(Q)]_{1/2}$. Однако в силу теоремы 3.1, [8] имеет место равенство $[\mathcal{D}(\mathcal{A}_\mathcal{R}); L_2(Q)]_{1/2} = \mathring{H}^1(Q)$. Поскольку оператор $\mathrm{R_Q}$ непрерывно и взаимооднозначно отображает $\mathring{H}^1(Q)$ на $H^1_\gamma(Q)$, то $[\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma); L_2(Q)]_{1/2} = H^1_\gamma(Q)$. ■

Пример 2.4

Пусть область Q из примера 2.3. Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$w_t(x,t) = \Delta w(x,t) + f(x,t) \qquad ((x,t) \in Q_T) \tag{2.33}$$

с нелокальными граничными условиями

$$w_{|_{x_2=0}} = w_{|_{x_2=1}},\ w_{|_{x_1=0}} = \gamma w_{|_{x_1=1}},\ w_{|_{x_1=2}} = \gamma w_{|_{x_1=1}}. \tag{2.34}$$

и с начальным условием

$$w|_{t=0} = \varphi(x), \qquad (x \in Q) \tag{2.35}$$

где $|\gamma| < 1$.

Пусть $H^1_\gamma(Q)$ – подпространство функций из $H^1(Q)$ удовлетворяющих условию (2.24). Соответствующий разностный оператор $\mathrm{R_Q} : \mathring{H}^1(Q) \to H^1_\gamma$, определяется по формуле

$$\mathrm{R}u(x) = u(x) + \gamma u(x_1+1, x_2) + \gamma u(x_1-1, x_2)$$

Тогда уравнение (2.33) можно заменить на уравнение

$$\mathrm{R_Q} u_t(x,t) = \Delta \mathrm{R_Q} u(x,t) + f(x,t) \qquad ((x,t) \in Q_T)$$

с условиями Дирихле

$$u|_{\partial Q \times (0,T)} = 0$$

и начальным условием

$$u|_{t=0} = \mathrm{R_Q^{-1}}\varphi(x). \qquad (x \in Q)$$

В силу теоремы 2.10 задача 2.33–2.35 имеет единственное сильное решение тогда и только тогда, когда $\varphi \in H^1_\gamma(Q)$

Глава 3

Гладкость решений нелокальных параболических задач.

3.1 Гладкость решений параболических задач с нелокальными условиями без подхода носителей нелокальных членов к границе.

В настоящем параграфе покажем, что сильные решения параболических задач с нелокальными условиями без подхода носителей нелокальных членов к границе обладают соответствующей гладкостью вблизи гладкой границы.

Обозначим через $H^{2k,k}(Q_T)$ пространство Соболева комплекснозначных функций $u \in L_2(Q_T)$, имеющих обобщенные производные $\mathcal{D}_x^\alpha \mathcal{D}_t^\beta u \in$

$L_2(Q_T)$, $|\alpha+2\beta|\le 2k$, с нормой

$$\|u\|_{H^{2k,k}(Q_T)} = \left\{ \sum_{|\alpha+2\beta|\le 2k} \int\limits_{Q_T} |\mathcal{D}_x^\alpha \mathcal{D}_t^\beta u(x,t)|^2 dxdt + \int\limits_{Q_T} |u(x,t)|^2 dxdt \right\}^{1/2}.$$

Рассмотрим задачу (2.1)–(2.3) из § 2.1.

Теорема 3.1 *Предположим, что выполнены условия 2.1 и 2.2. Пусть u — сильное решение задачи (2.1)–(2.3).*

Тогда $u\in H^{2,1}(Q_T)$.

Доказательство: Пусть $u\in\mathcal{W}(\mathcal{L}_\gamma)$ — сильное решение задачи (2.1)–(2.1), где оператор $\mathcal{L}_\gamma$ определен в § 2.1 В силу уравнения (2.1) мы имеем

$$\mathcal{L}_\gamma u(\cdot,t) = F(\cdot,t), \tag{3.1}$$

где $F(\cdot,t) = f(\cdot,t) - u_t(\cdot,t) \in L_2(Q)$ и $u(\cdot,t)\in\mathcal{D}(\mathcal{L}_\gamma)$ для почти всех $t\in(0,T)$. Поскольку $\mathcal{D}(\mathcal{L}_\gamma)\subset H^2(Q)$, то из (3.1) следует, что

$$u(\cdot,t)\in H^2(Q)$$

и

$$\|u\|_{H^2(Q)} \le c_1\|F\|_{L_2(Q)} \tag{3.2}$$

для почти всех $t\in(0,T)$, где $c_1>0$ не зависит от t. Возводя в квадрат (3.2) и интегрируя от 0 до T, получаем

$$\|u\|^2_{H^{2,0}(Q_T)} \le c_2(\|f\|^2_{L_2(Q_T)} + \|u_t\|^2_{L_2(Q_T)}).$$

Отсюда следует, что $u\in H^{2,1}(Q_T)$. ■

Аналогичный результат имеет место и для сильных решений параболических задач с нелокальными условиями в цилиндре.

Рассмотрим задачу (2.12)–(2.14) из §2.2.

Теорема 3.2 *Предположим, что выполнены условия 2.3 и 2.4. Пусть* u *— сильное решение задачи (2.12)–(2.14).*

Тогда $u \in H^{2,1}(Q_T)$.

Доказательство проводится так же как и в теореме 3.1.

3.2 Гладкость решений параболических задач с нелокальными условиями на сдвигах границы.

В настоящем параграфе мы будем рассматривать гладкость сильных решений задачи (2.27)–(2.29). Эта задача рассматривалась в § 2.3. В настоящем пункте область $Q \subset \mathbb{R}^n$ является ограниченной с границей $\partial Q \in C^2$. Мы будем предполагать, выполненным условие 2.6.

Будем рассматривать неограниченный оператор $\mathcal{A}_\gamma : \mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$, действующий в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(Q)$ по формуле $\mathcal{A}_\gamma u = \mathcal{A} u$, где

$$\mathcal{A} u = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u\right)$$

с областью определения $D(\mathcal{A}_\gamma) = \{u \in H^1_\gamma(Q) : \mathcal{A}_\gamma u \in L_2(Q)\}$ где $a_{ij} \in C^\infty(\overline{Q})$, $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ — вещественные G-периодические функции; $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c|\xi|^2$ для любых $x \in \overline{Q}$, $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$.

Будем рассматривать также оператор $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$, связанный оператором $\mathrm{R_Q}$, существующим вследствие условия 2.6.

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.1 *Предположим, что $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$ — сильно эллиптический оператор. Пусть $v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)$ и $z \in C^2(\overline{Q})$ такая, что $z|_{\partial Q} = 0$. Тогда $zv \in H^2(Q)$ и имеют место оценки*

$$\|v\|_{H^1(Q)} \leq c_1 \|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)}, \tag{3.3}$$

$$\|zv\|_{H^2(Q)} \leq c_2 \|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)}. \tag{3.4}$$

Доказательство. Поскольку $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$ — сильно эллиптический оператор, то из неравенства (**??**) следует, что

$$\|\mathrm{R_Q^{-1}} v\|_{H^1(Q)} \leq c_3 \|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)}. \tag{3.5}$$

В силу теоремы 2.7, оператор $\mathrm{R_Q}$ взаимооднозначно и непрерывно отображает $\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{R}})$ в $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)$, более того, $\|\mathrm{R_Q^{-1}} v\|_{H^1(Q)} \geq c_4 \|v\|_{H^1(Q)}$, поэтому из (3.5) следует (3.3).

В силу условий на функцию z, имеет место $zv \in \mathring{H}^1(Q)$. Применяя к zv оператор $\mathcal{A}$, получаем

$$\mathcal{A}(z(x)v(x)) = z(x)\mathcal{A}v(x) + B_1 v(x) \in L_2(Q),$$

где B_1 — дифференциальный оператор первого порядка с коэффициентами из $C(\overline{Q})$. В силу результатов о гладкости обобщенных решений задачи Дирихле для эллиптических уравнений в гладких областях, получаем, что $zv \in H^2(Q)$, и имеет место оценка

$$\|zv\|_{H^2(Q)} \le c_5(\|\mathcal{A}v\|_{L_2(Q)} + \|v\|_{H^1(Q)}).$$

В силу (3.3), из последнего неравенства следует (3.4). ■

Для замкнутого множества $S \subset \mathbb{R}^n$ будем рассматривать ε-окрестность $U_\varepsilon(S) = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, S) < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Будем предполагать, что множество $\mathcal{K}$ удовлетворяет следующему условию.

Условие 3.1 *Множество* $\mathcal{K}$ *можно представить в виде конечного объединения связных замкнутых множеств* k_i $(i = 1, \dots, k)$ *и существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что* $\overline{U}_\varepsilon(k_i) \cap \overline{U}_\varepsilon(k_j) = \emptyset$ *для всех* $i, j = 1, \dots, k$, $i \ne j$. *Более того, предположим, что* $\mathcal{K} \cap \partial Q = \bigcup\limits_{i=1}^{k_\Gamma} k_i$ *(*$k_\Gamma \le k$*).*

Через $\mathcal{K}_\Gamma$ обозначим совокупность множеств $\{k_i\}_{i=1}^{k_\Gamma}$. При выполнении условия 3.1 будем предполагать, что выполнено следующее условие.

Условие 3.2 *Для любого* $k_i \in \mathcal{K}_\Gamma$ *существует единственное* $0 \ne h' \in G$ *такое, что* $k_i + h' \in \mathcal{K}_\Gamma$*.*

Введем дополнительные обозначения. Пусть для $k_i \in \mathcal{K}_\Gamma$ имеем $k_i + h' = k_j \in \mathcal{K}_\Gamma$, тогда будем обозначать h' через h_{ij}. Положим $B_\varepsilon(k_i) = \{x \in \overline{Q} : \varrho(x, k_i) < \varepsilon\}$ и $\Gamma_\varepsilon(k_i) = \{x \in \partial Q : \varrho(x, k_i) < \varepsilon\}$, для $k_i \in \mathcal{K}_\Gamma$, где $\varepsilon > 0$ из условия 3.1 Для множества $\Gamma_\varepsilon(k_i)$ введем следующие подмножества $\Gamma^1_\varepsilon(k_i) = \{x \in \Gamma_\varepsilon(k_i) : x + h_{ij} \in Q\}$ и $\Gamma^2_\varepsilon(k_i) = \{x \in \Gamma_\varepsilon(k_i) : x + h_{ij} \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{Q}\}$.

Разобьем множество $\mathcal{K}_\Gamma$ на три подмножества $\mathcal{K}_\Gamma^1 = \{k_i \in \mathcal{K}_\Gamma : \Gamma_\varepsilon^1(k_i) = \emptyset\}$, $\mathcal{K}_\Gamma^2 = \{k_i \in \mathcal{K}_\Gamma : \Gamma_\varepsilon^1(k_i) \neq \emptyset$ и $\Gamma_\varepsilon^2(k_i) = \emptyset\}$ и $\mathcal{K}_\Gamma^3 = \{k_i \in \mathcal{K}_\Gamma : \Gamma_\varepsilon^1(k_i) \neq \emptyset$ и $\Gamma_\varepsilon^2(k_i) \neq \emptyset\}$.

Для исследования гладкости функций из пространства $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)$ вблизи множества $\mathcal{K}_\Gamma^3$ будем предполагать выполненным следующее условие.

Условие 3.3 *Множество $k_i \in \mathcal{K}_\Gamma^3$ является $(n-2)$-мерным многообразием класса C^2, если $n \geq 3$, и k_i — точка, если $n = 2$.*

Приведем несколько примеров.

Пример 3.1

Пусть $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, $M = \{(1,0)\}$. Тогда множество $\mathcal{K}$ состоит из семи точек: $(0,0)$, $(\pm 1, 0)$, $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$. Очевидно, $\mathcal{K}_\Gamma = \mathcal{K} \setminus \{(0,0)\}$. Множество $\mathcal{K}_\Gamma^1$ состоит из двух точек $(\pm 1, 0)$; множество $\mathcal{K}_\Gamma^2$ пусто; множество $\mathcal{K}^3$ состоит из четырех точек $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$.

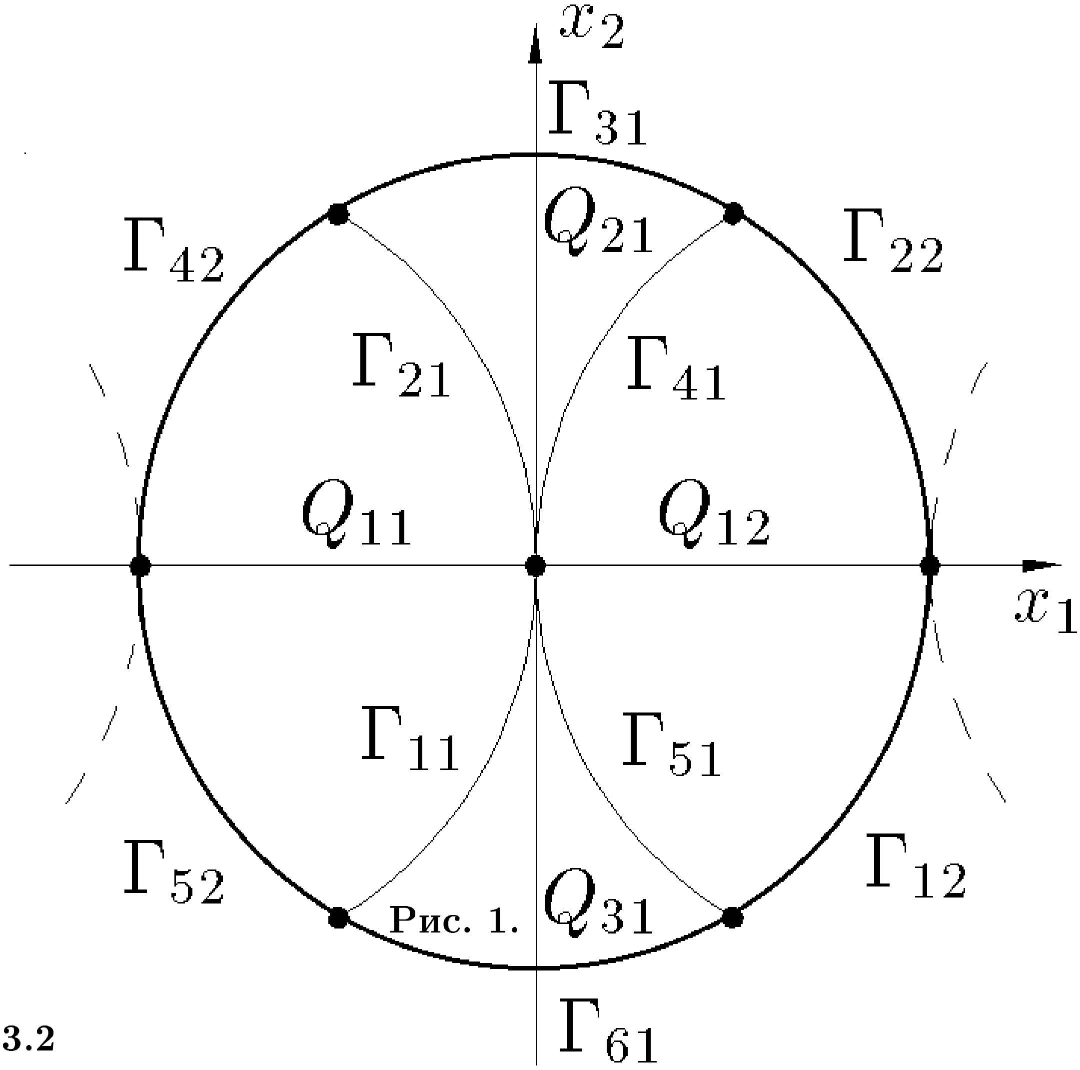

Рис. 1.

Пример 3.2

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ область с границей класса C^2, которая вне кругов $U_{1/8}((-1,0))$, $U_{1/8}((-1,1))$, $U_{1/8}((1,2))$ и $U_{1/8}((1,0))$, совпадает с областью, заданной следующими условиями:

$$\begin{array}{ll} -1 < x_1 < 1; & \\ 0 < x_2 < 1, & x_1 < 0; \\ 0 < x_2 < x_1^4 + 1, & x_1 > 0. \end{array}$$

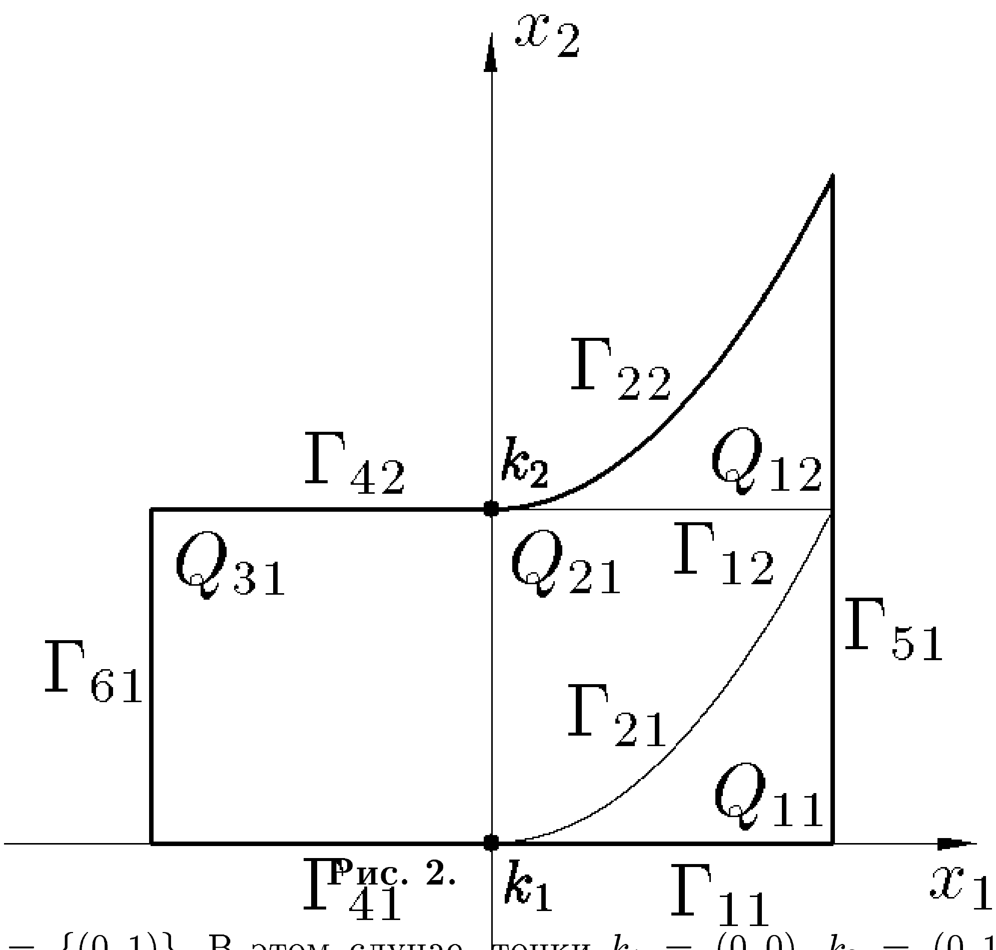

Рис. 2.

Пусть $M = \{(0,1)\}$. В этом случае, точки $k_1 = (0,0)$, $k_2 = (0,1)$ принадлежат $\mathcal{K}^2_\Gamma$.

Модифицируем пример 3.2 так, чтобы точки k_1 и k_2 принадлежали множеству $\mathcal{K}^3_\Gamma$.

Пример 3.3

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ область с границей класса C^2, которая вне кругов $U_{1/8}((-1,0))$, $U_{1/8}((1,2))$ и $U_{1/8}((1,0))$, совпадает с областью, заданной следующими условиями:

$$\begin{gathered} -1 < x_1 < 1 \\ 0 < x_2 < x_1^3 + 1. \end{gathered}$$

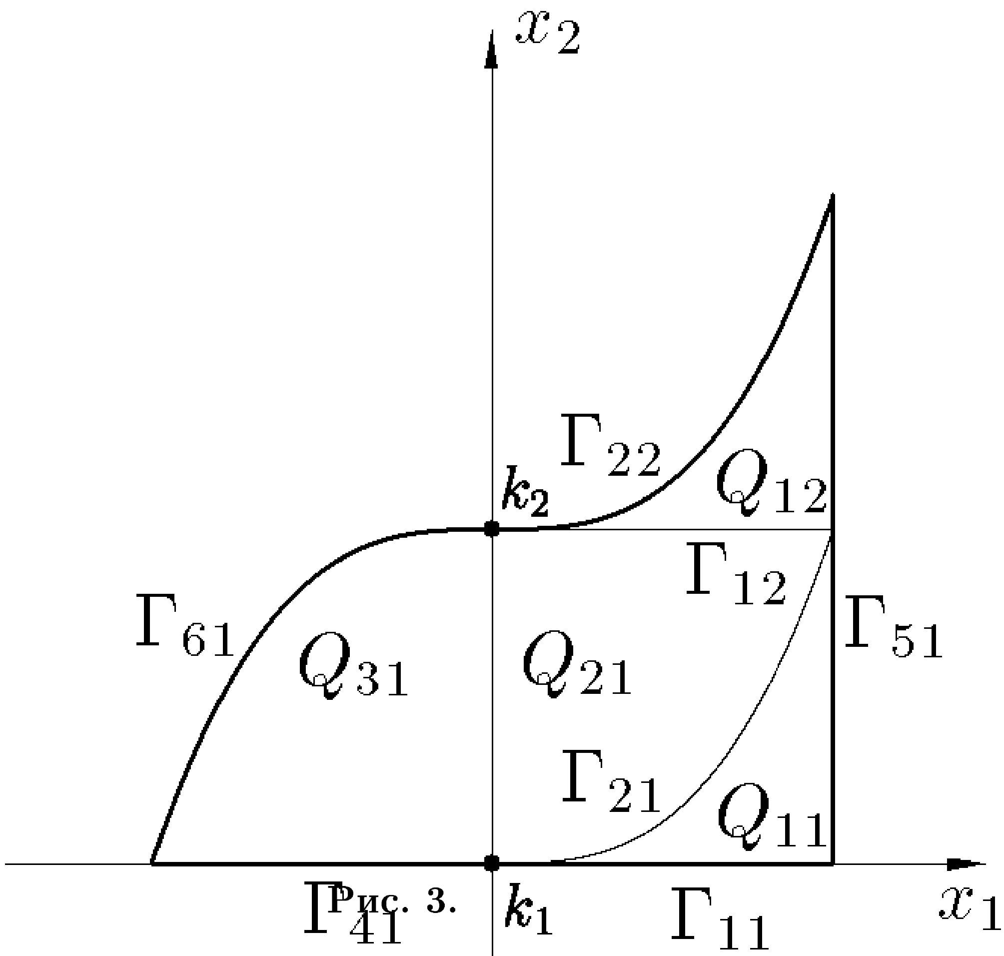

Рис. 3.

Пусть $M = \{(0,1)\}$. Теперь точки $k_1 = (0,0)$, $k_2 = (0,1)$ принадлежат $\mathcal{K}^3_\Gamma$.

Будем предполагать, что оператор $\mathcal{A}_\mathcal{R}$ сильно эллиптический, и выполнены условия 2.5, 2.6, 3.1, 3.2 и 3.3.

Лемма 3.2 *Пусть $k_i \in \mathcal{K}^1_\Gamma$. Тогда для любой функции $v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)$ выполнено $v|_{\Gamma_\varepsilon(k_i)} \in H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))$ и имеет место оценка:*

$$\|v\|_{H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))} \le c_6 \|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)}. \tag{3.6}$$

Доказательство. Учитывая нелокальные условия, которым удовлетворяет функция v, имеем

$$v|_{\Gamma_\varepsilon(k_i)} = \sum_{l=1}^{J_0} \gamma_l v(x-h_l)|_{\Gamma_\varepsilon(k_i)}.$$

В силу теоремы о локальной гладкости обобщенных решений эллиптических уравнений $v \in H^2_{loc}(Q)$. Поскольку в $\Gamma_\varepsilon(k_i)+h_l \subset Q$ для $l=1,\dots,J_0$, то $v|_{\Gamma_\varepsilon(k_i)} \in H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))$.

Для $\delta > 0$ будем обозначать $Q_\delta = \{x \in Q : \rho(x,\partial Q) > \delta\}$. Пусть $\xi \in C^2(\overline{Q})$ такая, что $\xi(x)=1$, $x \in \overline{Q}_\delta$; $\xi(x)=0$, $x \in \overline{Q} \setminus Q_{\delta/2}$. В силу леммы 3.1, $\xi v \in H^2(Q)$, и для функции ξv справедливо неравенство

$$\|\xi v\|_{H^2(Q)} \le c_7 \|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)}.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\|v\|_{H^2(Q_\delta)} \le c_8 \|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)} \tag{3.7}$$

Поскольку существует такое $\delta > 0$, что

$$\|v\|_{H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))} \le c_4 \|u\|_{H^2(Q_\delta)},$$

то, в силу неравенства (3.7) следует (3.6). ■

Для исследования гладкости функций из $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)$ вблизи множества $\mathcal{K}^2_\Gamma \cup \mathcal{K}^3_\Gamma$ введем весовые пространства.

В силу теоремы 2, § 2, гл. 6, [17] можно построить такую функцию $d \in C^2(\overline{Q})$, что $c\varrho(x,\partial Q) \le d(x) \le C\varrho(x,\partial Q)$ при $x \in Q$. В силу условия 3.3, существует такая функция $g \in C(\overline{Q})$, что $g^2 \in C^2(\overline{Q})$, $g(x) > 0$

при $x \in Q$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0, \\ x \in k_i}} \frac{g(x)}{\rho(x,k_i)} = g_{x_0} \geq g_0 > 0$ для всех $x_0 \in k_i$, $k_i \in \mathcal{K}_\Gamma^3$ и $\frac{\partial(g^2(x))}{\partial n}|_{k_i} = 0$. Введем функцию $\Phi \in C^2(\overline{Q})$, $\Phi(x) \geq 0$, $x \in \overline{Q}$, подчиненную условиям для $k_i \in \mathcal{K}_\Gamma^2$:

$$\Phi|_{\Gamma_\varepsilon^1(k_i)} \leq m_1 d(x - h_{ij})|_{\Gamma_\varepsilon^1(k_i)};$$

для $k_i \in \mathcal{K}_\Gamma^3$:

$$\Phi|_{\Gamma_\varepsilon^1(k_i)} \leq m_2 g^2(x) d(x - h_{ij})|_{\Gamma_\varepsilon^1(k_i)}.$$

В дальнейшем будем предполагать, что функция $\Phi(x)$ является G-периодической, что не противоречит указанным условиям.

Определим функциональное пространство $H^2_\Phi(Q)$ как пополнение функций из $C^2(\overline{Q})$ по норме

$$\|u\|_{H^2_\Phi(Q)} = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \|\Phi u_{x_i x_j}\|^2_{L_2(Q)} + \|u\|^2_{H^1(Q)} \right)^{1/2}.$$

Для области $D \subset Q$ будем обозначать через $H^2_\Phi(D)$ сужение функций из $H^2_\Phi(Q)$ на D.

Лемма 3.3 *Пусть $k_i \in \mathcal{K}_\Gamma^2$. Тогда для любой функции $v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)$ выполнено $(\Phi v)|_{\Gamma_\varepsilon(k_i)} \in H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))$ и имеет место оценка:*

$$\|(\Phi v)\|_{H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))} \leq c_{10} \|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)}. \tag{3.8}$$

Доказательство. В силу нелокальных условий, которым удовлетворяет функция v, и условия 3.2, имеем

$$v|_{\Gamma_\varepsilon(k_i)} = \sum_{l=1}^{J_0} \gamma_l v(x - h_l)|_{\Gamma_\varepsilon(k_i)}. \tag{3.9}$$

При этом для всех $\{h_l\}_{l=1}^{J_0}$, кроме одного (для определенности пусть h_{J_0}), имеем

$$\Gamma_\varepsilon(k_i) + h_l \subset Q. \tag{3.10}$$

Для h_{J_0} имеет место $k_i + h_{J_0} = k_j \in \mathcal{K}_\Gamma^2$ и

$$\Gamma_\varepsilon(k_i) + h_{J_0} \subset \overline{Q}. \tag{3.11}$$

Рассмотрим след функции $\Phi(x)v(x)$ на многообразии $\Gamma_\varepsilon(k_i)$. Получаем

$$\begin{aligned} \Phi v|_{\Gamma_\varepsilon(k_i)} = \sum_{l=1}^{J_0-1} \gamma_l(\Phi(x)v(x-h_l))|_{\Gamma_\varepsilon(k_i)} + \gamma_{J_0}(\Phi(x)v(x-h_{J_0}))|_{\Gamma_\varepsilon(k_i)} \\ = I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Поскольку $\Phi \in C^2(\overline{Q})$ и $v \in H^2_{loc}(Q)$, то, как показано в доказательстве леммы 3.2, слагаемое I_1 принадлежит $H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))$, и имеет место оценка

$$\|I_1\|_{H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))} \leq c_{11}\|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)}.$$

Рассмотрим второе слагаемое I_2. В силу леммы 3.1, функция $dv \in H^2(Q)$ и $\|dv\|_{H^2(Q)} \leq c_{12}\|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)}$. Поскольку $k_i \in \mathcal{K}_\Gamma^2$, то $v(x-h_{J_0})|_{\Gamma_\varepsilon^2(k_i)} = 0$, и, следовательно, $(d(x-h_{J_0})v(x-h_{J_0})|_{\Gamma_\varepsilon(k_i)} \in H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))$. По построению функции $\Phi(x)$, имеем оценку

$$\|I_2\|_{H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))} \leq c_{13}\|d(x-h_{J_0})v(x-h_{J_0})\|_{H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))} \leq c_{14}\|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)}.$$

Поэтому $(\Phi v)|_{\Gamma_\varepsilon(k_i)} \in H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))$ и верна оценка (3.8). ■

Лемма 3.4 *Пусть* $k_i \in \mathcal{K}^3_\Gamma$. *Тогда для любой функции* $v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)$ *выполнено* $(\Phi v)|_{\Gamma_\varepsilon(k_i)} \in H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))$ *и имеет место оценка:*

$$\|(\Phi v)\|_{H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))} \le c_{15}\|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)}. \tag{3.13}$$

Доказательство. Поскольку $\Gamma^1_\varepsilon(k_i)+h_{ij} \subset \overline{Q}$, то, как показано в лемме 3.3, $(d(x-h_{ij})v(x))|_{\Gamma^1_\varepsilon(k_i)} \in H^{3/2}(\Gamma^1_\varepsilon(k_i))$ и

$$\|d(x-h_{ij})v(x)\|_{H^{3/2}(\Gamma^1_\varepsilon(k_i))} \le c_{16}\|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)}. \tag{3.14}$$

В то же время, $\Gamma^2_\varepsilon(k_i)+h_{ij} \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{Q}$, и, в силу нелокальных условий, $v|_{\Gamma^2_\varepsilon(k_i)} = \sum\limits_{l=1}^{J_0-1} \gamma_l v(x-h_l)|_{\Gamma^2_\varepsilon(k_i)} \in H^{3/2}(\Gamma^2_\varepsilon(k_i))$ и

$$\|v\|_{H^{3/2}(\Gamma^2_\varepsilon(k_i))} \le c_{17}\|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)}. \tag{3.15}$$

Покажем, что $(g^2(x)d(x-h_{ij})v)|_{\Gamma_\varepsilon(k_i)} \in H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))$.

Введем ограниченные операторы $I^1_g : L_2(\Gamma^1_\varepsilon(k_i)) \to L_2(\Gamma_\varepsilon(k_i))$ по формуле

$$I^1_g w(x) = \begin{cases} g^2(x)w(x), & x \in \Gamma^1_\varepsilon(k_i) \\ 0, & x \in \Gamma^2_\varepsilon(k_i) \end{cases}$$

и $I^2_g : L_2(\Gamma^2_\varepsilon(k_i)) \to L_2(\Gamma_\varepsilon(k_i))$ по формуле

$$I^2_g w(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Gamma^1_\varepsilon(k_i) \\ g^2(x)w(x), & x \in \Gamma^2_\varepsilon(k_i) \end{cases}.$$

Покажем, что оператор I^1_g ограничен также как оператор $I^1_g : H^2(\Gamma^1_\varepsilon(k_i)) \to H^2(\Gamma_\varepsilon(k_i))$. Пусть $w \in H^2(\Gamma^1_\varepsilon(k_i))$. Поскольку $k_i \subset \overline{\Gamma^1_\varepsilon(k_i)}$, и k_i является гладким многообразием, то для функции $g^2(x)w(x)$

определено

$(g^2(x)w(x))|_{k_i}$ и $(\frac{\partial(g^2(x)w(x))}{\partial n})|_{k_i}$. Поскольку $g(x)|_{k_i} = 0$, то имеем:

$$\begin{aligned} &(g^2(x)w(x))|_{k_i} = 0, \\ &(\frac{\partial g^2(x)w(x)}{\partial n})|_{k_i} = 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Обозначим через $\widetilde{w_g}$ продолжение нулем функции $g^2(x)w(x)$ в $\Gamma_\varepsilon(k_i)$. Поскольку $k_i = \overline{\Gamma^1_\varepsilon(k_i)} \cap \overline{\Gamma^2_\varepsilon(k_i)}$, то в силу (3.16) имеем $\widetilde{w_g} \in H^2(\Gamma_\varepsilon(k_i))$. В то же время, $\tilde{w}_g = I^1_g w$ и $\|\tilde{w}_g\|_{H^2(\Gamma_\varepsilon(k_i))} \leq c_{18}\|w\|_{H^2(\Gamma^1_\varepsilon(k_i))}$.

Для гладкого многообразия S пространство $H^{3/2}(S)$ является интерполяционным пространством: $H^{3/2}(S) = [H^2(S); L_2(S)]_{1/4}$. Следовательно, в силу интерполяционной теоремы (см. теорема 5.1, гл. 1, [8]), оператор I^1_g является ограниченным оператором $I^1_g : H^{3/2}(\Gamma^1_\varepsilon(k_i)) \to H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))$.

Аналогично можно показать ограниченность оператора $I^2_g : H^{3/2}(\Gamma^2_\varepsilon(k_i)) \to H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))$.

По определению операторов I^1_g и I^2_g имеем:

$$g^2(x)d(x-h_{ij})v(x)|_{\Gamma_\varepsilon(k_i)} = I^1_g((d(x-h_{ij})v)|_{\Gamma^1_\varepsilon(k_i)})+$$

$$I^2_g((d(x-h_{ij})v)|_{\Gamma^2_\varepsilon(k_i)}) \in H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i)).$$

В то же время, по построению функции $\Phi(x)$, получаем:

$$\|\Phi(x)v(x)\|_{H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))} \leq c_{19}\|g^2(x)d(x-h_{ij})v(x)\|_{H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))}.$$

При этом, в силу оценок (3.14) и (3.15), а также ограниченности операторов I^1_g и I^2_g, имеет место (3.13). ■

Теорема 3.3 *Предположим, что выполнены условия 2.6, 3.1, 3.2 и 3.3.*

Тогда $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma) \subset H^2_\Phi(Q)$*, и имеет место следующая оценка:*

$$\|v\|_{H^2_\Phi(Q)} \leq c_{20}\|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)}, \tag{3.17}$$

для всех $v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)$*.*

Доказательство. Возьмем функцию $v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)$. Пусть $x_0 \in \partial Q \setminus \mathcal{K}^\varepsilon$, где $\mathcal{K}^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, \mathcal{K}) < \varepsilon\}$. Рассмотрим $v|_{\Gamma_{\varepsilon/2}(x_0)}$, где $\Gamma_{\varepsilon/2}(x_0) = \{x \in \partial Q : \rho(x, x_0) < \varepsilon/2\}$. Имеем $\overline{\Gamma_{\varepsilon/2}(x_0)} \subset \Gamma_p$, где согласно лемме 2.2 $\Gamma_p = \Gamma_{rl}$. В силу нелокальных условий, $v|_{\Gamma_{\varepsilon/2}(x_0)} = 0$ или $v|_{\Gamma_{\varepsilon/2}(x_0)} = \sum\limits_{l=1}^{J_0} \gamma_l v(x-h_l)|_{\Gamma_{\varepsilon/2}(x_0)}$. Рассмотрим последний случай. Поскольку $\Gamma_{\varepsilon/2}(x_0) + h_l \subset Q$ для $l = 1, \dots, J_0$, то, как показано в доказательстве леммы 3.2, $v|_{\Gamma_{\varepsilon/2}(x_0)} \in H^{3/2}(\Gamma_{\varepsilon/2}(x_0))$ и

$$\|v\|_{H^{3/2}(\Gamma_{\varepsilon/2}(x_0))} \leq c_{21}\|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}. \tag{3.18}$$

В то же время, для любого $k_i \in \mathcal{K}_\Gamma$, в силу одной из лемм 3.2, 3.3 или 3.4, имеет место $(\Phi v)|_{\Gamma_\varepsilon(k_i)} \in H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))$ и $\|\Phi v\|_{H^{3/2}(\Gamma_\varepsilon(k_i))} \leq c_{22}\|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)}$. Отсюда и из (3.18) получаем, что $(\Phi v)|_{\partial Q} \in H^{3/2}(\partial Q)$ и

$$\|\Phi v\|_{H^{3/2}(\partial Q)} \leq c_{23}\|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)}. \tag{3.19}$$

Покажем, что $\Phi v \in H^2(Q)$. Пусть $F \in H^2(Q)$ такая, что $F|_{\partial Q} = (\Phi v)|_{\partial Q}$ и $\|F\|_{H^2(Q)} \leq c_{24}\|(\Phi v)\|_{H^{3/2}(\partial Q)}$. Тогда $(\Phi v - F) \in \mathring{H}^1(Q)$, и имеет место

$$\mathcal{A}(\Phi v - F) = \Phi \mathcal{A} v + B_2 v + \mathcal{A} F \in L_2(Q), \tag{3.20}$$

где B_2 — дифференциальный оператор первого порядка. В силу (3.20) функция $(\Phi v - F)$, а, следовательно, и Φv принадлежит $H^2(Q)$, и имеет место оценка

$$\|\Phi v\|_{H^2(Q)} \leq c_{25}(\|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)} + \|F\|_{H^2(Q)}) \leq c_{26}\|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)} \tag{3.21}$$

Покажем теперь, что $v \in H^2_\Phi(Q)$. Действительно,

$$\Phi v_{x_i x_j} = (\Phi v)_{x_i x_j} - \Phi_{x_i x_j} v - \Phi_{x_i} v_{x_j} - \Phi_{x_j} v_{x_i} \in L_2(Q),$$

для $i, j = 1, \ldots, n$, и имеет место оценка

$$\|v\|_{H^2_\Phi(Q)} \leq c_{27}\|\Phi v\|_{H^2(Q)} \leq c_{28}\|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)}.$$

■

Применим теперь полученные результаты к исследованию гладкости сильных решений параболических уравнений с нелокальными условиями на сдвигах границы.

Введем пространство $H^{2,1}_\Phi(D_T)$ как пополнение функций из $C^\infty(\overline{D}_T)$ по норме

$$\|u\|_{H^{2,1}_\Phi(D_T)} = \left\{ \int_0^T \|u_t\|^2_{L_2(Q)} dt + \int_0^T \|u\|^2_{H^2_\Phi(D)} dt \right\}^{1/2},$$

где $D \subset Q$, $D_T = D \times (0, T)$.

Через $H^{2,0}_\Phi(D_T)$ обозначим пространство, определяемое как пополнение функций из $C^\infty(\overline{D}_T)$ по норме

$$\|u\|_{H^{2,0}_\Phi(D_T)} = \left\{ \int_0^T \|u\|^2_{H^2_\Phi(D)} dt \right\}^{1/2}.$$

Теорема 3.4 *Предположим, что выполнены условия 2.6, 3.1, 3.2 и 3.3.*

Тогда любое сильное решение $u \in \mathcal{W}(\mathcal{A}_\gamma)$ задачи (2.27)–(2.29) принадлежит $H_\Phi^{2,1}(Q_T)$.

Доказательство. Пусть $u \in \mathcal{W}(\mathcal{A}_\gamma)$ — сильное решение задачи (2.27)–(2.29). В силу уравнения (2.27) мы имеем

$$\mathcal{A}_\gamma u(\cdot, t) = F(\cdot, t), \tag{3.22}$$

где $F(\cdot, t) = f(\cdot, t) - u_t(\cdot, t) \in L_2(Q)$ для п.в. $t \in (0, T)$. По теореме 3.3

$$u(\cdot, t) \in H_\Phi^2(Q),$$

и

$$\|u\|_{H_\Phi^2(Q)} \le c_{31} \|F\|_{L_2(Q)} \tag{3.23}$$

для почти всех $t \in (0, T)$, где $c_{31} > 0$ не зависит от t. Возводя в квадрат (3.23) и интегрируя от 0 до T, получаем

$$\|u\|^2_{H_\Phi^{2,0}(Q_T)} \le c_{32} (\|f\|^2_{L_2(Q_T)} + \|u_t\|^2_{L_2(Q_T)}).$$

Отсюда следует, что $u \in H_\Phi^{2,1}(Q_T)$. ■

Пример 3.4

Пусть область Q из примера 3.2. Рассмотрим неограниченный оператор $\mathcal{A}_\gamma : \mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$, действующий по формуле $\mathcal{A}_\gamma u = -\Delta u$, $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma) = \{u \in H_\gamma^1(Q) : \mathcal{A}_\gamma u \in L_2(Q)\}$, где $H_\gamma^1(Q) = \mathrm{R_Q} \mathring{H}^1(Q)$ — подпространство функций из $H^1(Q)$, удовлетворяющих нелокальным условиям на сдвигах границы. Оператор $\mathrm{R_Q}$ определим по формуле $\mathrm{R_Q} = \mathrm{P_Q RI_Q}$, где $\mathrm{R}u(x_1, x_2) = u(x_1, x_2) + \gamma u(x_1, x_2 - 1) + \gamma u(x_1, x_2 + 1)$, $|\gamma| < 1$. Можно показать, что выполнено условие 2.6. Будем обозначать: $k_1 = (0, 0)$, $k_2 = (0, 1)$ и $h_{12} = (0, 1)$ $h_{21} = (0, -1)$. Пусть $\varepsilon = 1/4$, удовлетворяющее условию 3.1. Легко видеть, что $k_1, k_2 \in \mathcal{K}^2_\Gamma$ (см. пример 3.2). В силу теоремы 3.4, любое решение $u \in \mathcal{W}(\mathcal{A}_\gamma)$ задачи (2.27)–(2.29) принадлежит пространству $H^{2,1}_\Phi(Q_T)$ и $H^{2,1}_\Phi(Q_{21} \times (0, T))$, где в определении весовых пространств $\Phi(x) = \rho^4(x)$, $x \in B_\varepsilon(k_1)$ и $\Phi(x) = \rho^4(x - h_{12})$, $x \in B_\varepsilon(k_2)$, где $\rho(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Пример 3.5

Пусть теперь область Q из примера 3.3. Оператор $\mathcal{A}_\gamma : \mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$ действует по формуле $\mathcal{A}_\gamma u = \Delta u$, $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma) = \{u \in H^1_\gamma(Q) : \mathcal{A}_\gamma u \in L_2(Q)\}$, где $H^1_\gamma(Q) = \mathrm{R_Q} \mathring{H}^1(Q)$. Оператор R такой же как в примере 3.4. Будем обозначать: $k_1 = (0, 0)$, $k_2 = (0, 1)$ и $h_{12} = (0, 1)$ $h_{21} = (0, -1)$. Пусть $\varepsilon = 1/4$, удовлетворяющее условию 3.1. В этом случае, $k_1, k_2 \in \mathcal{K}^3_\Gamma$ (см. пример 3.3). В силу теоремы 3.4, любое решение $u \in \mathcal{W}(\mathcal{A}_\gamma)$ задачи (2.27)–(2.29) принадлежит пространству $H^{2,1}_\Phi(Q_T)$ и $H^{2,1}_\Phi(Q_{21} \times (0, T))$, где в определении весовых пространств $\Phi(x) = \rho^2(x)\rho^4(x) = \rho^6(x)$, $x \in B_\varepsilon(k_1)$ и $\Phi(x) = \rho^2(x - h_{12})\rho^4(x - h_{12}) = \rho^6(x - h_{12})$, $x \in B_\varepsilon(k_2)$.

3.3 Гладкость решений параболических дифференциально-разностных уравнений.

В главе 1 изучались параболические функционально-дифференциальные уравнения. Важным примером таких уравнений являются дифференциально-разностные уравнения. Как уже отмечалось, в отличие от параболических дифференциальных уравнений, эти уравнения обладают рядом принципиально новых свойств. Например, гладкость сильных решений функционально-дифференциальных параболических уравнений может нарушаться внутри цилиндрической области даже при бесконечно гладкой правой части уравнения. В настоящем пункте рассмотрим гладкость сильных решений параболических дифференциально-разностных уравнений.

Теорема 3.5 *Пусть область Q удовлетворяет условию 1.1, и пусть $\partial Q \setminus \bigcup\limits_i M_i \subset \mathcal{K}$. Предположим, что дифференциально-разностный оператор $\mathcal{A}_\mathcal{R}$ — сильно эллиптический.*

Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ и всех $s = 1, 2, \ldots;\ l = 1, \ldots, N(s)$ любое сильное решение и задачи (1.21)–(1.23) $u(x,t) \in\ H^{2,1}((Q_{sl} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon) \times (0,T))$

Доказательство. Из определения сильного решения и уравнения (1.21) следует, что

$$\mathcal{A}_\mathcal{R} u(\cdot,t) = F(\cdot,t), \tag{3.24}$$

где $F(\cdot,t) = f(\cdot,t) - u_t(\cdot,t) \in L_2(Q)$ для почти всех $t \in (0,T)$. В силу теоремы 11.2, [31] о гладкости обобщенных решений краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений для любого $\varepsilon > 0$

$$u(\cdot, t) \in H^2(Q_{sl} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon)$$

и

$$\|u\|_{H^2(Q_{sl}\setminus\mathcal{K}^\varepsilon)} \le c\|F\|_{L_2(Q)} \tag{3.25}$$

для почти всех $t \in (0, T)$ и $s = 1, 2, \ldots$; $l = 1, \ldots, N(s)$, где $c > 0$ не зависит от t.

Возводя обе части неравенства (3.25) в квадрат и интегрируя от 0 до T, получим

$$\|u\|_{W_2^{2,0}((Q_{sl}\setminus\mathcal{K}^\varepsilon)\times(0,T))} \le c_1(\|f\|_{L_2(\Omega_T)} + \|u_t\|_{L_2(\Omega_T)}).$$

Отсюда следует, что $u \in W_2^{2,1}((Q_{sl} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon) \times (0, T))$. ■

Как показывает следующий пример, гладкость сильных решений задачи (1.21)–(1.23) может нарушаться на границе соседних цилиндров $Q_{s_1 l_1} \times (0, T)$ и $Q_{s_2 l_2} \times (0, T)$, а также вблизи множества $\mathcal{K} \times (0, T)$.

Пример 3.6

Рассмотрим первую смешанную задачу (1.21)–(1.23) предполагая, что $Q = (0, \frac{4}{3}) \times (0, \frac{4}{3})$, $\mathcal{A}_\mathcal{R} = -\Delta \mathrm{R_Q}$, $\mathrm{R_Q} = \mathrm{P_Q R I_Q}$, $\mathrm{R}u(x) = u(x) + \gamma u(x_1 + 1, x_2 + 1) + \gamma u(x_1 - 1, x_2 - 1)$, $|\gamma| < 1$. Очевидно, разбиение $\mathcal{R}$ области Q состоит из двух классов подобластей: 1)$Q_{11} = (0, \frac{1}{3}) \times (0, \frac{1}{3})$, $Q_{12} = (1, 4/3) \times (1, 4/3)$ и 2) $Q_{21} = Q \setminus (\overline{Q}_{11} \cup \overline{Q}_{12})$. Множество $\mathcal{K}$ принадлежит границе ∂Q и состоит из четырех точек: $g^1 = (\frac{1}{3}, 0)$, $g^2 = (\frac{4}{3}, 1)$, $g^3 = (0, \frac{1}{3})$, $g^4 = (1, \frac{4}{3})$.

Матрицы $A_s(x)$ $(x \in \overline{Q}_{s1}; s = 1, 2)$, определенные по формуле (1.20), имеют вид

$$A_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \qquad (x \in \overline{Q}_{11}),$$

$$A_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \ (x \in \overline{Q}_{21} \cap \mathcal{K}), \quad A_2(x) = (1) \ (x \in \overline{Q}_{21} \setminus \mathcal{K}).$$

Таким образом, матрицы $A_s(x)(\xi_1^2 + \xi_2^2)$ $(x \in \overline{Q}_{s1}; s = 1, 2)$ положительно определены. Следовательно, оператор $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$ — сильно эллиптический.

Положим

$v_1(r, \varphi) = \xi(r) r^\lambda \sin \lambda\varphi$, $v_2(r, \varphi) = \xi(r) r^\lambda \sin \lambda\varphi(\frac{3\pi}{2} - \varphi)$,

где $\xi(r) \in \dot{C}^\infty(Q)(\mathbb{R})$,$0 \le \xi(r) \le 1$, $\xi(r) = 1$ при $r \le \frac{1}{8}$, $\xi(r) = 0$ при $r \ge \frac{1}{6}$, $\lambda = \frac{2}{\pi} \arccos(\frac{\gamma}{2})$, r, φ — полярные координаты.

Введем функцию $v(x)$ по формуле

$$v(x) = \begin{cases} \frac{v_1(x_1 - \frac{1}{3}, x_2) - \gamma v_2(x_1 - \frac{1}{3}, x_2)}{1 - \gamma^2} & (x \in Q_{11}), \\[2ex] \frac{-\gamma v_1(x_1 - \frac{4}{3}, x_2 - 1) + v_2(x_1 - \frac{4}{3}, x_2 - 1)}{1 - \gamma^2} & (x \in Q_{12}), \\[2ex] v_1(x_1 - \frac{1}{3}, x_2) + v_2(x_1 - \frac{4}{3}, x_2 - 1) & (x \in Q_{21}). \end{cases} \tag{3.26}$$

Очевидно,

$\mathrm{R_Q} v(x) = v_1(x_1 - \frac{1}{3}, x_2) + v_2(x_1 - \frac{4}{3}, x_2 - 1)$.

Поскольку $0 < \lambda < 1$, легко видеть, что $v \in \mathring{W}_2^1(Q)$, $-\Delta \mathrm{R_Q} v \in L_2(Q)$, но $v \notin H^2(Q_{s1} \cap S_\delta(g^1))$ для любого $\delta > 0$. Следовательно, функция $u(x,t) = tv(x)$ является сильным решением задачи (1.21)–(1.23) для $f(x,t) = v(x) - t\Delta \mathrm{R_Q} v(x) \in L_2(Q_T)$ и $\varphi(x) = 0$. Однако, $u \notin H^{2,0}((Q_{s1} \cap S_\delta(g^1)) \times (0, T))$ для любого $\delta > 0$.

Покажем теперь, что

$ux_1|_{x_1=\frac{1}{3}+0, x_2\le\frac{1}{8}} \ne ux_1|_{x_1=\frac{1}{3}-0, x_2\le\frac{1}{8}}$.

В силу (3.26) для этого достаточно убедиться, что

$$v_{1\varphi}|_{\varphi=\frac{\pi}{2}, r\le\frac{1}{8}} \ne \frac{1}{1-\gamma^2}\{v_{1\varphi}|_{\varphi=\frac{\pi}{2}, r\le\frac{1}{8}} - \gamma v_{2\varphi}|_{\varphi=\frac{\pi}{2}, r\le\frac{1}{8}}\}. \tag{3.27}$$

Соотношение (3.27) эквивалентно следующему

$$\lambda\cos\frac{\lambda\pi}{2} \ne \frac{1}{1-\gamma^2}(\lambda\cos\lambda\frac{\pi}{2} - \lambda\cos\lambda\pi). \tag{3.28}$$

Приводя подобные и используя равенство $\cos\frac{\lambda\pi}{2} = \frac{\gamma}{2}$, мы можем переписать (3.28) в виде

$$\gamma^3 - \gamma^2 + 2 \ne 0. \tag{3.29}$$

Поскольку корни уравнения $\gamma^3-\gamma^2+2=0$ имеют вид $\gamma_{1,2}=1\pm i$, $\gamma_3=-1$, условие (3.29) выполняется при $0<\gamma<1$. Поэтому $u\notin H^{2,0}(S_\sigma(y))$ для любых $y=(y_1,y_2)$ и $\sigma>0$ таких, что $y_1=\frac{1}{3}$, $0<y_2<\frac{1}{8}$, $\sigma<y_2$. Таким образом, гладкость сильных решений задачи (1.21)–(1.23) может нарушаться на границе соседних подобластей $Q_{s_1l_1}\times(0,T)$ и $Q_{s_2l_2}\times(0,T)$.

Этот пример показывает, что при $\varepsilon=0$ теорема 3.5, вообще говоря, не верна. Исследуем гладкость сильных решений задачи (1.21)–(1.23) в цилиндрических подобластьях.

Теорема 3.6 *Пусть оператор $\mathcal{A}_\mathcal{R}$ — сильно эллиптический. Предположим, что $\partial Q\in C^2$ и выполнены условия 3.1, 3.2, 3.3.*

Тогда любая функция $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\mathcal{R})$ *принадлежит пространству* $H^2_\Phi(Q_{sl})$ *для всех* $s = 1, 2, \dots\ l = 1, \dots, N(s)$, *и имеет место следующая оценка:*

$$\|u\|_{H^2_\Phi(Q_{sl})} \le c_{29}\|u\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\mathcal{R})}. \tag{3.30}$$

Доказательство. Для любой функции $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\mathcal{R})$, функция $v = \mathrm{R_Q}u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)$ принадлежит по теореме 3.3 пространству $H^2_\Phi(Q)$, и имеет место оценка

$$\|v\|_{H^2_\Phi(Q)} \le c_{30}\|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)}.$$

Следовательно, функция $v'(x) = \Phi(x)v(x)$ принадлежит пространству $H^2(Q)$. Однако функция $\Phi(x)$ является G-периодической, поэтому справедливы равенства

$$\Phi(x)u(x) = \Phi(x){\mathrm{R_Q}}^{-1}v(x) = {\mathrm{R_Q}}^{-1}\Phi(x)v(x) = {\mathrm{R_Q}}^{-1}v'(x). \tag{3.31}$$

Из леммы 8.15, гл. 2, [31] следует, что $\Phi(x)u(x) = {\mathrm{R_Q}}^{-1}v' \in H^2(Q_{sl})$ для всех $s = 1, 2, \dots\ l = 1, \dots, N(s)$.

Однако, поскольку,

$$\Phi u_{x_i x_j} = (\Phi u)_{x_i x_j} - \Phi_{x_i x_j}u - \Phi_{x_i}u_{x_j} - \Phi_{x_j}u_{x_i} \in L_2(Q_{sl}),$$

то $u \in H^2_\Phi(Q_{sl})$, для всех $s = 1, 2, \dots\ l = 1, \dots, N(s)$. Наконец, оценка (3.30) следует из непрерывности оператора ${\mathrm{R_Q}}^{-1} : \mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma) \to \mathcal{D}(\mathcal{A}_\mathcal{R})$. ■

Теорема 3.7 *Пусть оператор* $\mathcal{A}_\mathcal{R}$ *— сильно эллиптический. Предположим, что* $\partial Q \in C^2$ *и выполнены условия 3.1, 3.2, 3.3.*

Тогда любое сильное решение задачи (1.21)–(1.23) $u \in \mathcal{W}(\mathcal{A}_\mathcal{R})$ *принадлежит* $H^{2,1}_\Phi(Q_{sl} \times (0,T))$, *для* $s = 1, 2, \dots;\ l = 1, \dots, N(s)$.

Доказательство. Пусть $u \in \mathcal{W}(\mathcal{A}_{\mathcal{R}})$ — сильное решение задачи (1.21)–(1.23). В силу уравнения (1.21) мы имеем

$$\mathcal{A}_{\mathcal{R}} u(\cdot, t) = F(\cdot, t), \tag{3.32}$$

где $F(\cdot, t) = f(\cdot, t) - u_t(\cdot, t) \in L_2(Q)$ для п.в. $t \in (0, T)$. По теореме 3.6

$$u(\cdot, t) \in H^2_{\Phi}(Q_{sl}),$$

для $s = 1, 2, \dots; \ l = 1, \dots, N(s)$, и

$$\|u\|_{H^2_{\Phi}(Q_{sl})} \leq c_{31} \|F\|_{L_2(Q)} \tag{3.33}$$

для почти всех $t \in (0, T)$, где $c_{31} > 0$ не зависит от t. Возводя в квадрат (3.33) и интегрируя от 0 до T, получаем

$$\|u\|^2_{H^{2,0}_{\Phi}(Q_{sl} \times T)} \leq c_{32} (\|f\|^2_{L_2(Q_T)} + \|u_t\|^2_{L_2(Q_T)}).$$

Отсюда следует, что $u \in H^{2,1}_{\Phi}(Q_{sl} \times T)$. ■

Пример 3.6 показывает, что гладкость сильных решений параболических дифференциально-разностных уравнений может нарушаться на границе соседних цилиндрических подобластей. Подобный эффект наблюдается для обобщенных решений сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений. В работе [31] получены необходимые и достаточные условия гладкости решений эллиптических дифференциально-разностных уравнений на границе соседних подобластей. Покажем, что аналогичные условия имеют место и для сильных решений параболических дифференциально-разностных уравнений.

Будем предполагать, что область Q удовлетворяет условию 1.1. Зафиксируем $s=p$ и рассмотрим точку $y^1 \in Q \cap (\partial Q_{p1} \setminus \mathcal{K})$. Пусть $y^l = y^1 + h_{pl} \in \partial Q_{pl} \setminus \mathcal{K}$ $(l=1,\dots,N(p))$. Будем считать, что $y^l \in Q$ $(l=1,\dots,J_0)$, $y^l \in \partial Q$ $(l=J_0+1,\dots,N(p))$. Мы приведем условия, когда для данного $1 \le l \le J_0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что сильное решение параболического дифференциально-разностного уравнения $u \in H^{2,1}(S_\varepsilon(y^l) \times (0,T))$ $S_\varepsilon(y^l) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varrho(x,y^l) < \varepsilon\}$, т.е. решение обладает соответствующей гладкостью в окрестности множества $S_\varepsilon(y^l) \times (0,T)$.

В силу леммы 2.2 существует единственная подобласть $Q_{qj} \ne Q_{p1}$ такая, что $y^1 \in \partial Q_{qj}$.

Обозначим $\gamma_\varepsilon = \{x \in \partial Q_{s1} : |x| < \varepsilon\}$. Через $R_{\alpha s1}(x)$ обозначим матрицы порядка $J_0 \times (N(s)-J_0)$, полученные из матрицы $R_{\alpha s}(x)$ вычеркиванием J_0 первых столбцов и $N(s)-J_0$ последних строк. Поскольку $h_{pl} = h_{ql}$ $(l=1,\dots,J_0)$, матрицы порядка $J_0 \times J_0$, полученные из матриц $R_{\alpha s}(x)$ при $s=p,q$ вычеркиванием последних $N(s)-J_0$ строк и столбцов равны. Обозначим эту матрицу порядка $J_0 \times J_0$ через $R_{\alpha p0}(x)$. Обозначим матрицу порядка $J_0 \times (J_0-1)$, полученную из матрицы $R_{\alpha p0}(x)$ при $\alpha = (0,\dots,0,2)$ вычеркиванием l-го столбца через $B_{lp}(x)$.

Условие 3.4 *Будем говорить, что подобласть Q_{pl} и точка $y^l \in \partial Q_{pl} \setminus \mathcal{K}$ $(1 \le l \le J_0)$ удовлетворяет условию 3.4, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для всех $x \in \gamma_\varepsilon$ каждый столбец матриц $R_{\alpha s1}(x)$ $(\alpha = (0,\dots,0,2), s=p,q)$ является линейной комбинацией столбцов матрицы $B_{pl}(x)$.*

Теорема 3.8 *Пусть оператор* $\mathcal{A}_\mathcal{R}$ *— сильно эллиптический дифференциально-разностный оператор. Предположим, что выполнено условие 1.1.*

Тогда для каждой подобласти Q_{pl} *и точки* $y^l \in \partial Q_{pl} \setminus \mathcal{K}$ $(1 \le l \le J_0)$ *любое сильное решение задачи (1.21)–(1.23)* $u \in \mathcal{W}(\mathcal{A}_\mathcal{R})$ *принадлежит* $H^{2,1}(S_\varepsilon(y^l) \times (0,T))$ *тогда и только тогда, когда для* Q_{pl} *и* y^l *выполнено условие 3.4.*

Доказательство. Пусть $u \in \mathcal{W}(\mathcal{A}_\mathcal{R})$ — сильное решение задачи (1.21)–(1.23) В силу уравнения (1.21) мы имеем

$$\mathcal{A}_\mathcal{R} u(\cdot,t) = F(\cdot,t), \tag{3.34}$$

где $F(\cdot,t) = f(\cdot,t) - u_t(\cdot,t) \in L_2(Q)$ для п.в. $t \in (0,T)$. Пусть для Q_{pl} и y^l выполнено условие 3.4, тогда в силу теоремы 12.2, гл. 2 [31] мы получаем

$$u(\cdot,t) \in H^2((S_\varepsilon(y^l))$$

и

$$\|u\|_{H^2((S_\varepsilon(y^l))} \le c_1 \|F\|_{L_2(Q)} \tag{3.35}$$

для почти всех $t \in (0,T)$, где $c_1 > 0$ не зависит от t. Возводя в квадрат (3.35) и интегрируя от 0 до T, получаем

$$\|u\|^2_{H^{2,0}((S_\varepsilon(y^l)\times(0,T))} \le c_2(\|f\|^2_{L_2(Q_T)} + \|u_t\|^2_{L_2(Q_T)}).$$

Отсюда следует, что $u \in H^{2,1}((S_\varepsilon(y^l) \times (0,T))$.

Если для Q_{pl} и y_l условие 3.4 не выполнено, то в силу теоремы 12.2, гл 2, [31] существует такая функция $v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{R}})$, что $v \notin H^2(S_\varepsilon(y^l))$ для любого $\varepsilon > 0$. Тогда функция $u(x,t) = tv(x)$ является сильным решением задачи (1.21)–(1.23), где $f(x,t) = v(x) - t\mathcal{A}_{\mathcal{R}}v(x) \in L_2(Q_T)$ и $\varphi(x) = 0$. Однако $u \notin H^{2,0}((S_\varepsilon(y^l) \times (0,T))$ для любого $\varepsilon > 0$.

Теорема 3.8 полностью доказана. ■

Литература

[1] А.В. Бицадзе, А.А. Самарский О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР, 1969, т. 185, N4. с. 739–740.

[2] В.В Власов. О некоторых свойствах решений функционально-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Успехи матем. наук, 1994, т. 49, N. 3, с. 175–176.

[3] В.В. Власов. О разрешимости и свойствах решений функционально-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Матем. сборник, 1995, т. 186, N.8, 67–92.

[4] В.В. Власов. Об одном классе функционально-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом в гильбертовом пространстве // Матем. заметки, 1997, т. 62, N. 5, с. 782–786.

[5] Н. Данфорд, Дж. Шварц. Линейные операторы. Т.2, М., Мир, 1966.

[6] Т. Като. Теория возмущений линейных операторов. М., Мир, 1972.

[7] О.А.Ладыженская, В.А.Солонников, Н.Н.Уральцева. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., "Наука", 1967.

[8] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., Мир, 1971.

[9] Л.Е. Россовский. Коэрцитивность функционально-дифференциальных уравнений // Математические заметки, т. 59, вып. 1, 1996, с. 103–113.

[10] А.Л. Скубачевский. Нелокальные эллиптические задачи с параметром. — Матемематический сборник, 1983, т. 121, N 6, с. 201–210.

[11] А.Л. Скубачевский. Гладкость обобщенных решений первой краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения. — Математические заметки, 1983, т. 34, N 1, с. 105–112.

[12] А.Л. Скубачевский. Нелокальные краевые задачи со сдвигом. — Математические заметки, 1985, 38, N 4, с. 587–598.

[13] А.Л. Скубачевский. Эллиптические задачи с нелокальными условиями вблизи границы. — Математический сборник, 1986, т. 129, N 2, с. 279–302.

[14] А.Л. Скубачевский, Р.В. Шамин. Первая смешанная задача для параболического дифференциально-разностного уравнения. — Математические заметки, 1999, т.66, N.1, с. 145-153.

[15] А.Л. Скубачевский, Р.В. Шамин. Параболические дифференциально-разностные уравнения второго порядка. // Доклады Российской Академии Наук. 2001, т. 379, N 5, с. 735–738.

[16] Л.Н. Слободецкий. Обобщенные пространства С.Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных // Уч. зап. Ленинградского гос. пед. института им А.И. Герцена, том 197, 1958, с. 54–112.

[17] И. Стейн. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М., Мир, 1973.

[18] Х. Трибель. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М., Мир., 1980.

[19] Р.В. Шамин. Пространства начальных данных для параболических функционально-дифференциальных уравнений. // Математические заметки, 2002, т. 71, вып. 4, с. 636–640

[20] Р.В. Шамин. Параболическое уравнение с нелокальными условиями на сдвигах границы. // Тезисы Воронежской зимней математической школы 2000, Воронеж, 2000.

[21] A. Ashyralyev, P.E. Sobolevskii. Well-posedness of parabolic difference equations. Basel–Boston–Berlin, Birkhauser, 1994.

[22] G. DiBlasio, K. Kunisch, E. Sinestrari. L^2-regularity for parabolic partial integrodifferential equations with delay in the highest order derivatives. // J. Math. Anal. Appl. 1984, v. 102, p.231–263.

[23] F. Kappel, K. Kunisch. Invariance results for delay and Voltera equations in fractional order Sobolev Spaces. // Trans. of Amer. Math. Soc. 1987, v. 304, N 1, p. 1–57.

[24] K. Kunish, W. Shappacher. Necessary conditions for partial differential equations with delay to generate C_0-semigroup. // J. Diff. Equations. 1983, v. 50, p. 49–79.

[25] S. Nakagiri. Structural properties of functional differential equations in Banach Space. // Osaka J. Math. 1988, v. 25, p. 353–398.

[26] A. Pazy. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. New York–Berlin–Heidelberg, Springer, 1983.

[27] A.V. Razgulin. Rotational multi-petal waves in optical system with 2-D feedback, *Chaos in Optics, Proceedings SPIE*, **2039** (1993), 342–352.

[28] R.V. Shamin. Parabolic Differential Equations with Nonlocal Condition on Shifts of Boundary. // Abstracts of International Conference on Differential and Functional-Differential Equations, 1999, p. 99–97.

[29] R.V. Shamin. Spaces of Initial Data for Parabolic Functional Differential Equations. // Abstracts of International Conf. "Differential Equations

and Related Topics"dedicated to the Centenary Anniversary of I.G. Petrovskii,. Moscow, MSU, 2001. P. 372–373.

[30] R.V. Shamin. Parabolic Functional Differential Equations with contracted and expanded arguments. // Abstracts of International Conf. "Nonlinear partial differential equations". Kiev, 2001, p. 107.

[31] A.L. Skubachevskii. Elliptic functional differential equations and applications. Basel–Boston–Berlin, Birkhauser, 1997.

[32] A.L. Skubachevskii. The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations. — J. of Differential Equations, 1986, 63, 332–361.

[33] A.L Skubachevskii. Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics, Nonlinear Analysis 32 (1998), 261-278.

[34] A.L. Skubachevskii. On the Hopf bifurcation for quasilinear parabolic functional differential equation, Differentsial'nye Uravneniya 34 (1998), 1394-1401

[35] A.L. Skubachevskii, R.V. Shamin. The mixed boundary value problem for parabolic differential-difference equation // Functional differential equations, vol. 8, 2001, N 3–4, p. 407–424.

[36] A.L. Skubachevskii, R.V. Shamin. Parabolic Differential-Difference Equations. // Тезисы международной конференции по функциональному анализу. Киев, 2001, с. 90.

[37] M.A. Vorontsov, N.G. Iroshnikov, and R.L.Abernathy. Diffractive patterns in a nonlinear optical two-dimensional feedback system with field rotation, *Chaos, Solitons, and Fractals*, **4** (1994), 1701–1716.

[38] M. A. Vorontsov, J.C.Ricklin, G.W.Carhart. Optical simulation of phase-distorted imaging systems: nonlinear and adaptive optics approach. // Optical Engineering, 1995, v.34, N11, p.3229–3238.

[39] J. Wu. Semigroup and integral form of class of partial differential equations with infinite delay. // Diff. and Integral Equations. 1991, v. 4, N 6, p. 1325–1351.