

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ, ГАЗА И ПЛАЗМЫ

УДК 532.5

Р.В. Шамин, А.В. Юдин, Д.Е. Тихонов

О ЗАКОНЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ ВОЛН-УБИЙЦ

Российский университет дружбы народов

Рассмотрены вычислительные эксперименты по моделированию поверхностного волнения, которые применяются для исследования экстремально больших поверхностных волн в зависимости от параметров начального волнения. Рассмотрена гипотеза об экспоненциальном законе распределения времени ожидания волн-убийц.

Ключевые слова: поверхностные волны, волна-убийца, аномально большие волны в океане, вычислительный эксперимент, статистическая проверка гипотез.

Введение

В настоящее время феномен аномально больших поверхностных волн в океане (волны-убийцы) находится в центре внимания многих исследователей [1]. Одной из основных проблем, связанных с исследованием волн-убийц, является случайность их появления. С одной стороны, такие волны появляются достаточно редко, но в то же время частота их появления является закономерной. Как правило, редкие события описываются процессами Пуассона. Из математической статистики известно, что если число событий распределено по закону Пуассона, то интервалы между событиями должны быть распределены по экспоненциальному закону [2]. Использование пуассоновских процессов также мотивируется тем, что распределение Пуассона возникает в ряде предельных теорем.

С практической точки зрения наибольший интерес представляет не количество экстремальных волн, возникающих в течение времени, а время ожидания появления волны-убийцы. Поэтому мы будем рассматривать функции распределения времени ожидания таких волн.

В последнее время с помощью вычислительных экспериментов удалось достичь большого прогресса в изучении статистики и качественных характеристик волн-убийц (см. [3 – 7] и др.). На основании этих работ можно сделать вывод, что экстремальные волны возникают вследствие нелинейной динамики поверхностных волн. В настоящей работе были проведены масштабные эксперименты с целью статистической проверки гипотезы о законе распределения времени ожидания волн-убийц.

Имея достаточно богатую выборку времен возникновения волн-убийц, можно проверить гипотезу о применимости экспоненциального закона распределения к описанию времени возникновения этих событий с помощью хорошо известных статистических методов проверки гипотез. В нашей работе мы сформировали беспрецедентно большую базу данных, содержащую данные времени возникновения волн-убийц, на основании масштабных вычислительных экспериментов.

Постановка вычислительных экспериментов

Вычислительные эксперименты основаны на численном решении уравнений, описывающих плоское (2π -периодическое) потенциальное течение идеальной жидкости со свободной поверхностью и бесконечной глубиной. Для наших целей такая модель является вполне оправданной [8, 9].

Для построения эффективных численных методов и проведения больших серий вычислительных экспериментов мы используем полные нелинейные уравнения гидродинамики идеальной жидкости со свободной поверхностью, которые после проведения конформного отображения области, занятой жидкостью, принимают удобный для этого вид. Впервые применение конформных преобразований для описания нестационарного течения идеальной жидкости со свободной поверхностью было предложено в работах [10, 11]. В работах [12–14] и других конформные переменные применялись для численного моделирования динамики поверхностных волн. В нашей работе моделирование аномально больших поверхностных волн основано на уравнениях, предложенных в работе [15]. Вопросы математической корректности этих уравнений и построения численных методов их решения были исследованы в серии работ [16–21].

Хорошо известно, что при моделировании нелинейной динамики поверхностных волн периодически происходит обрушение волн (необязательно максимальной амплитуды). Чтобы исключить ситуацию преждевременной остановки расчета, мы использовали диссипацию в эволюционных уравнениях. Эта диссипация была пропорциональна четвертым производным профиля свободной поверхности. Таким образом, она была значимой лишь при большой крутизне поверхности, что соответствует сбросу энергии при обрушении волн. Чтобы скомпенсировать потерю энергии вследствие описанной ранее диссипации, мы применяли также и накачку, которая физически соответствовала поверхностной силе, пропорциональной наклону профиля волны. Хотя эта накачка и может рассматриваться как ветровое воздействие на поверхностные волны, она включалась только в момент снижения энергии, поэтому волны, которые моделировались в наших экспериментах, соответствуют волнам зыби, а не ветровым волнам.

Постановки вычислительных экспериментов в основном соответствовали постановкам из [4, 5]. Начальное возмущение поверхности в вычислительных экспериментах определялось как ансамбль бегущих в одну сторону волн со средним значением волнового числа $K_0 = 50$. Предполагалось, что начальное возмущение поверхности задается суммой гармоник со случайными фазами

$$\eta(x, 0) = \sum_{-\frac{1}{2}K_{\max}}^{\frac{1}{2}K_{\max}} \varphi(k - K_0) \cos(kx - \xi_k).$$

Здесь K_{\max} – полное число спектральных мод, ξ_k – случайная величина, равномерно распределенная на интервале $0 \leq \xi_k < 2\pi$. На рис. 1 представлен характерный график функции $\varphi(k) = k \exp(-\alpha k^2)$.

Параметры спектра подбирались так, чтобы квадрат средней крутизны

$$\mu^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta_x^2 dx$$

и дисперсия

$$D = \left(\int_{-K_0}^{K_0} k^2 e^{-\alpha k^2} dx \right) \left(\int_{-K_0}^{K_0} e^{-\alpha k^2} dx \right)^{-1}$$

принимали заданные значения (число K_0 определяет спектральную ширину).

Единого общепризнанного определения волны-убийцы до сих пор нет, поскольку это явление изначально содержит оценочные категории («большая волна», «опасное явление» и т.д.). Относительно различных определений волн-убийц см. [9, 22, 23]. Мы будем называть волной-убийцей такую волну, высота которой удовлетворяет амплитудному критерию:

$$\nu(t^*) = \frac{H_{\max}(t^*)}{\overline{H}_s(t^*)} \geq 2.1,$$

где $H_{\max}(t^*)$ – максимальная высота волнения в момент времени t^* ; $\overline{H}_s(t^*)$ – усредненная значительная высота волнения в момент времени t^* , т.е.

$$\overline{H}_s(t^*) = \frac{1}{t^*} \int_0^{t^*} H_s(\tau) d\tau.$$

Здесь $H_s(\tau)$ – значительная высота волнения в момент времени τ . Усреднение значительной высоты волнения позволяет нивелировать вклад самой аномальной волны при расчете значительной высоты волнения. Значение $\nu^* = 2.1$ соответствует принятым определениям волн-убийц в большинстве работ.

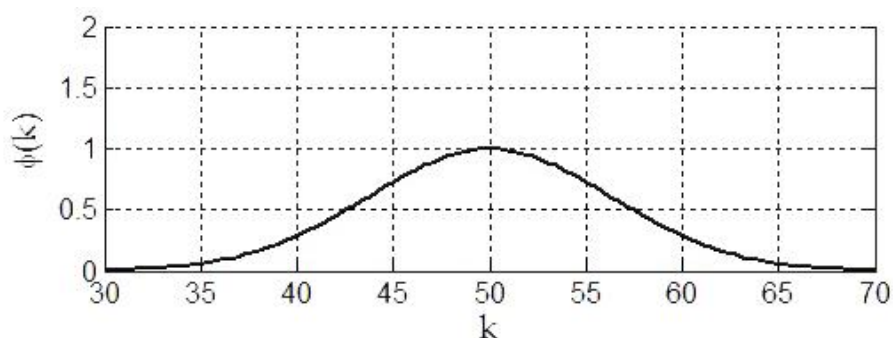


Рис. 1. Характерный график функции $\varphi(k - 50)$

Для исследования было проведено две серии экспериментов. В каждом из экспериментов в начальный момент времени волновое число принимало значение $K_0 = 50$, дисперсия $D = 20$, квадрат средней крутизны $\mu^2 = 2.06 \times 10^{-3}$ и $\mu^2 = 4.1 \times 10^{-3}$ соответственно. Была проведена масштабная серия однотипных экспериментов общей длительностью примерно 85800 периодов волн.

Закон распределения времени ожидания волны-убийцы

Как мы уже отмечали, волна-убийца представляет собой редкое событие в динамике поверхностных волн, поэтому для его описания предполагается использование пуассоновского потока. Используя вычислительные опыты, мы можем проверить эту гипотезу с помощью методов математической статистики.

Мы будем рассматривать случайную величину – время ожидания волны-убийцы, которую обозначим T . Для применения статистических критериев выдвинем основную и альтернативную гипотезы:

$H_0: T \sim F_{\text{exp}}(\lambda)$ – случайная величина T имеет экспоненциальный закон распределения с параметром λ ;

$H_1: T \not\sim F_{\text{exp}}(\lambda)$ – случайная величина T не распределена по экспоненциальному закону.

Экспоненциальный закон имеет следующую функцию распределения:

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & \text{если } t > 0, \\ 0, & \text{если } t \leq 0, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$ – параметр распределения. Плотность распределения имеет вид:

$$p(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & \text{если } t > 0, \\ 0, & \text{если } t \leq 0. \end{cases}$$

При этом математическое ожидание E и дисперсия σ^2 связаны следующим соотношением:

$$E = \sqrt{\sigma^2} = \frac{1}{\lambda}.$$

Для проверки нашей статистической гипотезы мы использовали стандартный метод – критерий согласия χ^2 с уровнем значимости $\alpha = 0.05$.

Для проверки выдвинутой гипотезы вычислялась величина:

$$\psi_T = \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i},$$

где m – число равных интервалов, на которые разбивается выборка, n_i – число попаданий в i -й интервал, $n'_i = F(t_{i+1}) - F(t_i)$ – теоретические частоты, F – функция распределения экспоненциального закона. Значение ψ_T сравнивается с табличным критическим значением χ_k^2 , где $k = (m - 1)$ – количество степеней свободы. Если $\psi_T \leq \chi_k^2$, то гипотеза H_0 принимается с вероятностью $1 - \alpha$, если же $\psi_T > \chi_k^2$, H_0 отвергается в пользу альтернативной гипотезы на уровне значимости α .

Кроме того, по значениям эмпирической и теоретической функции плотности вероятности для каждого из экспериментов был вычислен коэффициент детерминации, рассчитываемый по формуле

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (p_i - \hat{p}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (p_i - \bar{p}_i)^2},$$

где p_i – значения эмпирической функции плотности вероятности, \hat{p}_i – значения теоретической функции плотности вероятности,

$$\bar{p}_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i.$$

Сначала проверим нашу гипотезу для каждой серии экспериментов с одинаковыми значениями квадрата средней крутизны $\mu^2 = 2.06 \times 10^{-3}$ и $\mu^2 = 4.1 \times 10^{-3}$, а потом для смешанного случая.

Для статистического анализа сначала были рассмотрены результаты вычислительных экспериментов, в которых квадрат средней крутизны принимал значение $\mu^2 = 2.06 \times 10^{-3}$. Общая длительность экспериментов в этом случае составила $T = 41400$ периодов волн, в течение которых была зарегистрирована $N = 61$ волна-убийца. Математическое ожидание имело значение $E = 1203$, а дисперсия $\sigma^2 = 1200519$. Параметр экспоненциального закона распределения $\lambda = 0.0008$. Соотношение $\sigma/E = 0.91$ показывает хорошее соответствие гипотезе H_0 . Теоретическая функция плотности распределения имеет вид

$$p(t) = 0.0008 e^{-0.0008t}, t > 0. \quad (1)$$

На рис. 2 приведен пример волнограммы части эксперимента. Пространственно-временные следы аномально больших волн в течение примерно 3750 периодов волн представлены на рис. 3. Сравнительный график теоретической и эмпирической плотности распределения времени ожидания волн-убийц в вычислительном эксперименте представлен на рис. 4.

В результате вычислений по критерию χ^2 при $m = 6$ интервалах разбиения мы получили, что $\psi_T = 3.16$, $\chi_k^2 = 7.81$, $\psi_T \leq \chi_k^2$, т.е. гипотеза H_0 об экспоненциальном законе распределения принимается на уровне значимости $\alpha = 0.05$.

Коэффициент детерминации составил $R^2 = 0.88$, что свидетельствует о том, что высокая доля дисперсии эмпирических значений плотности вероятности объясняется полученной теоретической функцией (1).

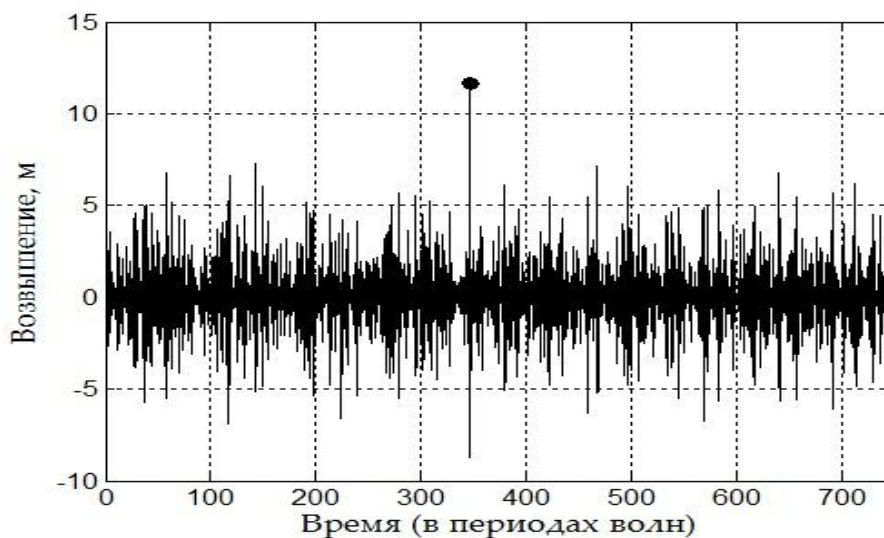


Рис. 2. Волнограмма части эксперимента

Аналогичные вычисления проводились и для экспериментов, в которых квадрат средней крутизны принимал значение $\mu^2 = 4.1 \times 10^{-3}$. В этом случае общая длительность экспериментов составила примерно $T = 44400$ периодов волн, общее количество волн-убийц $N = 105$. Соответствующие величины имели следующие значения $E = 894.87$, $\sigma^2 = 883002.3$, параметр закона $\lambda = 0.0011$. Соотношение $\sigma/E = 0.95$ также указывает на применимость экспоненциального закона распределения. Плотность вероятности имеет вид:

$$p(t) = 0.0011 e^{-0.0011t}, t > 0. \quad (2)$$

Сравнительный график теоретической и эмпирической плотности распределения времени ожидания волн-убийц в вычислительном эксперименте представлен на рис. 5.

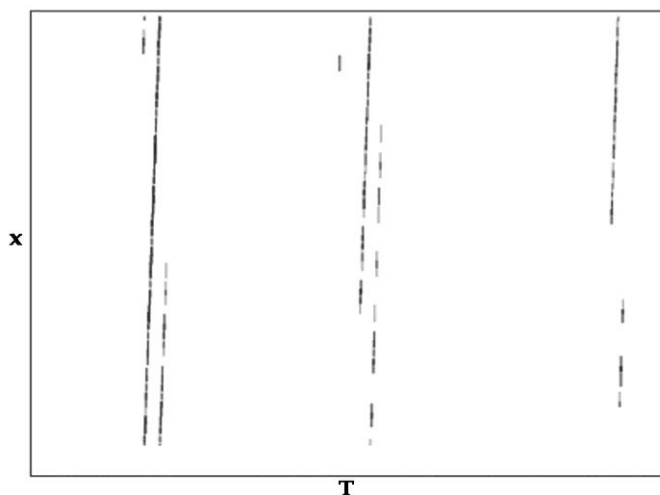


Рис. 3. Пространственно-временные следы волн-убийц

При проверке гипотезы по критерию χ^2 , при $m = 12$, получены следующие результаты: $\psi_T = 6.01$, $\chi_k^2 = 9.49$, $\psi_T \leq \chi_k^2$, следовательно, гипотеза H_0 об экспоненциальном законе распределения принимается на уровне значимости $\alpha = 0.05$.

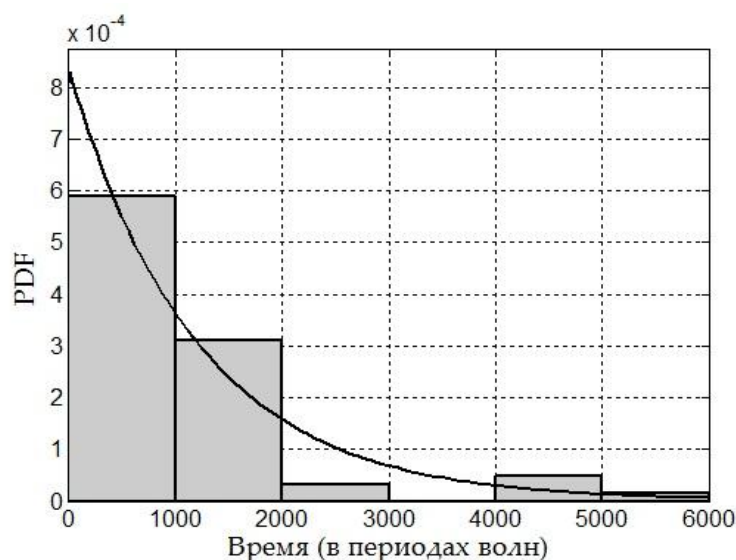


Рис. 4. Сравнительный график теоретической и эмпирической функции плотности распределения для экспериментов с $\mu^2 = 2.06 \times 10^{-3}$ (сплошная линия – теоретическая плотность вероятности, гистограмма – эмпирическая плотность вероятности)

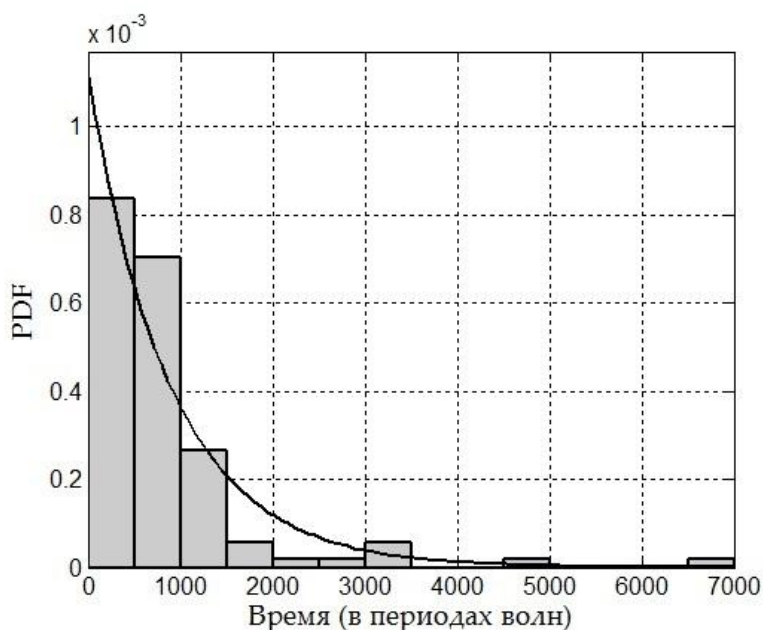


Рис. 5. Сравнительный график теоретической и эмпирической функции плотности распределения для экспериментов с $\mu^2 = 4.1 \times 10^{-3}$ (сплошная линия – теоретическая плотность вероятности, гистограмма – эмпирическая плотность вероятности)

Коэффициент детерминации $R^2 = 0.97$ также позволяет сделать вывод о том, что высокая доля дисперсии эмпирических значений плотности вероятности объясняется полученной теоретической функцией (2).

Теперь проведем статистическую проверку гипотезы об экспоненциальном распределении времени ожидания волны-убийцы в случае, когда примерно в половине вычислительных экспериментов квадрат средней крутизны принимал одно значение, а в другой половине – другое значение. Этот случай соответствует ситуации, когда имеются волны с различными параметрами крутизны.

Общая длительность эксперимента составила $T = 85800$ периодов волн, количество зарегистрированных волн-убийц составило $N = 166$. Математическое ожидание, дисперсия и

интенсивность принимали следующие значения: $E = 1007.79$, $\sigma^2 = 1015190$, параметр закона $\lambda = 0.00099$. Соотношение: $\sigma/E = 0.99$. Плотность вероятности выражается соотношением:

$$p(t) = 0.00099 e^{-0.00099t}, t > 0. \quad (3)$$

Сравнительный график теоретической и эмпирической плотности распределения времени ожидания волн-убийц в вычислительном эксперименте представлен на рис. 6.

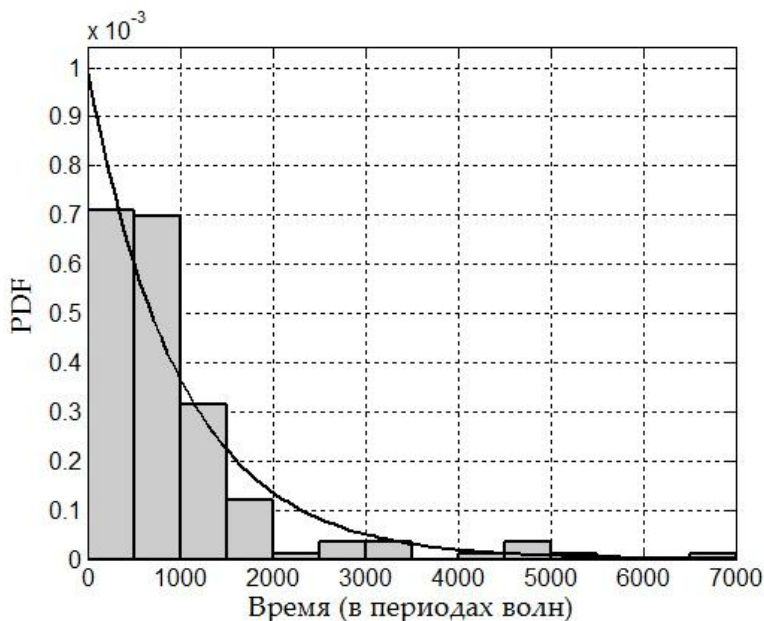


Рис. 6. Сравнительный график теоретической и эмпирической функции плотности распределения для экспериментов с различными значениями μ^2 (сплошная линия – теоретическая плотность вероятности, гистограмма – эмпирическая плотность вероятности)

В результате вычислений по критерию χ^2 при $m = 10$ интервалах разбиения мы получили, что $\psi_T = 14.88$, $\chi_k^2 = 12.59$, $\psi_T > \chi_k^2$, т.е. гипотеза H_0 об экспоненциальном законе распределения отвергается на уровне значимости $\alpha = 0/05$. В данном случае критерий χ^2 не дает оснований считать, что при рассмотренных параметрах волнения время ожидания волн-убийц описывается экспоненциальным законом распределения. Однако коэффициент детерминации принимал значение $R^2 = 0.99$, что свидетельствует о том, что высокая доля дисперсии эмпирических значений плотности вероятности объясняется полученной теоретической функцией (3). В данном случае можно считать, что время ожидания волны-убийцы также приближенно описывается экспоненциальным распределением.

Интересно отметить, что эмпирическая функция плотности вероятности в наших экспериментах имеет «неэкспоненциальные» хвосты, что свидетельствует о том, что в экспериментах всегда встречались очень большие интервалы между двумя соседними волнами-убийцами.

Заключение

В работе рассмотрен вопрос об оценке функции распределения времени ожидания волны-убийцы. С помощью результатов больших серий вычислительных экспериментов показано, что время ожидания аномальной поверхностной волны может быть описано с помощью экспоненциального закона распределения. Этот результат является ожидаемым и не противоречит известным натурным наблюдениям [24].

Однако в случае обработки результатов натуральных экспериментов следует учитывать возможное отклонение от экспоненциального закона, поскольку в реальной ситуации возможны волны различной крутизны.

Авторы выражают благодарность академику РАН В.Е. Захарову за постоянное внимание и поддержку работы, а также профессору Е.Н. Пелиновскому за полезные обсуждения предмета настоящей работы. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №15-35-20550_мол_а_вед.

Библиографический список

1. **Kharif, С.** Rogue Waves in the Ocean / С. Kharif, E. Pelinovsky, A. Slunyaev. – Berlin: Springer, 2009. – 216 p.
2. **Крамер, Г.** Математические методы статистики / Г. Крамер. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
3. **Chalikov, D.** Freak waves: Their occurrence and probability // Phys. Fluids. 2009. V. 21. Iss. 7.
4. **Захаров, В.Е.** О вероятности возникновения волн-убийц / В.Е. Захаров, Р.В. Шамин // Письма в ЖЭТФ. 2010. Т. 91. Вып. 2. С. 68–71.
5. **Захаров, В.Е.** Статистика волн-убийц в вычислительных экспериментах / В.Е. Захаров, Р.В. Шамин // Письма в ЖЭТФ. 2012. Т. 96. Вып. 1. С. 68–71.
6. **Слюняев, А.В.** Численное моделирование и анализ пространственно-временных полей аномальных морских волн / А.В. Слюняев, А.В. Сергеева // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2012. Т. 5. № 1. С. 24–36.
7. **Шамин, Р.В.** Моделирование пространственно-временного распространения волн-убийц / Р.В. Шамин, А.В. Юдин // Доклады Академии наук. 2013. Т. 448. № 5. С. 592–594.
8. **Куркин, А.А.** Волны-убийцы: факты, теория и моделирование / А.А. Куркин, Е.Н. Пелиновский. – Н. Новгород: НГТУ, 2004. – 158 с.
9. **Чаликов, Д.В.** Портрет волны-убийцы // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2012. Т. 5. № 1. С. 5–14.
10. **Овсянников, Л.В.** К обоснованию теории мелкой воды // Динамика сплошной среды: сб. науч. тр. / Акад. наук СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. Новосибирск, 1973. Вып. 15. С. 104–125.
11. **Whitney, J.C.** The numerical solution of unsteady free-surface flows by conformal mapping // In: Proc. Second Inter. Conf. on Numer. Fluid Dynamics (ed. M. Holt). 1971. Springer-Verlag. P. 458–462.
12. **Chalikov, D.** Modeling of Extreme Waves Based on Equations of Potential Flow with a Free Surface / D. Chalikov, D. Sheinin // Journ. Comp. Phys. 2005. V. 210. P. 247–273.
13. **Дьяченко, А.И.** Нелинейная динамика свободной поверхности идеальной жидкости / А.И. Дьяченко, В.Е. Захаров, Е.А. Кузнецов // Физика плазмы. 1999. № 10. С. 916–928.
14. **Ruban, V.P.** Water waves over a time-dependent bottom: Exact description for 2D potential flows // Phys. Lett. A. 2005. V. 340. № 1–4. P. 194–200.
15. **Zakharov, V.E.** New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface / V.E. Zakharov, A.I. Dyachenko, O.A. Vasilyev // Eur. J. Mech. B Fluids. 2002. V. 21. С. 283–291.
16. **Шамин, Р.В.** Динамика идеальной жидкости со свободной поверхностью в конформных переменных // Современная математика. Фундаментальные направления. 2008. Т. 28 С. 3–14.
17. **Шамин, Р.В.** Об одном численном методе в задаче о движении идеальной жидкости со свободной поверхностью // Сиб. журн. выч. мат. 2006. Т. 9. № 4. С. 325–340.
18. **Шамин, Р.В.** О существовании гладких решений уравнений Дьяченко, описывающих неустановившиеся течения идеальной жидкости со свободной поверхностью // Доклады Российской академии наук. 2006. Т. 406. № 5. С. 112–113.
19. **Шамин, Р.В.** Вычислительные эксперименты в моделировании поверхностных волн в океане / Р.В. Шамин. – М.: Наука, 2008. – 133 с.
20. **Шамин, Р.В.** Об оценке времени существования решений уравнения, описывающего поверхностные волны // Доклады Российской академии наук. 2008. Т. 418. № 5. С. 603–604.
21. **Шамин, Р.В.** Разрешимость уравнений, описывающих волны минимальной гладкости // Доклады Академии наук. 2010. Т. 432. № 4. С. 458–460.
22. **Бухановский, А.В.** Экстремальные и необычные ветровые волны: измерения, расчет, прогноз / А.В. Бухановский, Л.И. Лопатухин // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2011. Т. 4. №4. С. 5–18.

23. **Шамин, Р.В.** Вопросы устойчивости волн-убийц / Р.В. Шамин, А.В. Горленко, А.И. Смирнова // Вычислительные технологии. 2013. Т. 18. № 1. С. 96–105.
24. **Зайцев, А.И.** Аномально большие волны вблизи южного побережья о. Сахалин / А.И. Зайцев, А.Е. Малащенко, Е.Н. Пелиновский // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2011. Т. 4. № 4. С. 35–42.
25. **Лидбеттер, М.** Экстремумы случайных последовательностей и процессов / М. Лидбеттер, Х. Ротсен, Г. Линдгрэн. – М.: Мир, 1989. – 391 с.
26. **Шамин, Р.В.** Вопросы обнаружения и прогнозирования волн-убийц в вычислительных экспериментах / Р.В. Шамин, А.И. Смирнова, А.В. Юдин // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2012. Т. 5. № 3. С. 23–33.

*Дата поступления
в редакцию 05.05.2015*

R.V. Shamin, A.V. Yudin, D.E. Tikhonov

ON THE LAW OF DISTRIBUTION OF THE ROGUE WAVES WAITING TIME

Peoples' Friendship University of Russia

We consider the computational experiments on modeling of the surface waves that used for studying of extremely large surface waves depending on initial wave parameters. We consider the hypothesis of exponential distribution law of rogue waves waiting time.

Key words: surface wave, rogue waves, abnormally large waves in the ocean, computer experiment, statistical hypothesis testing.